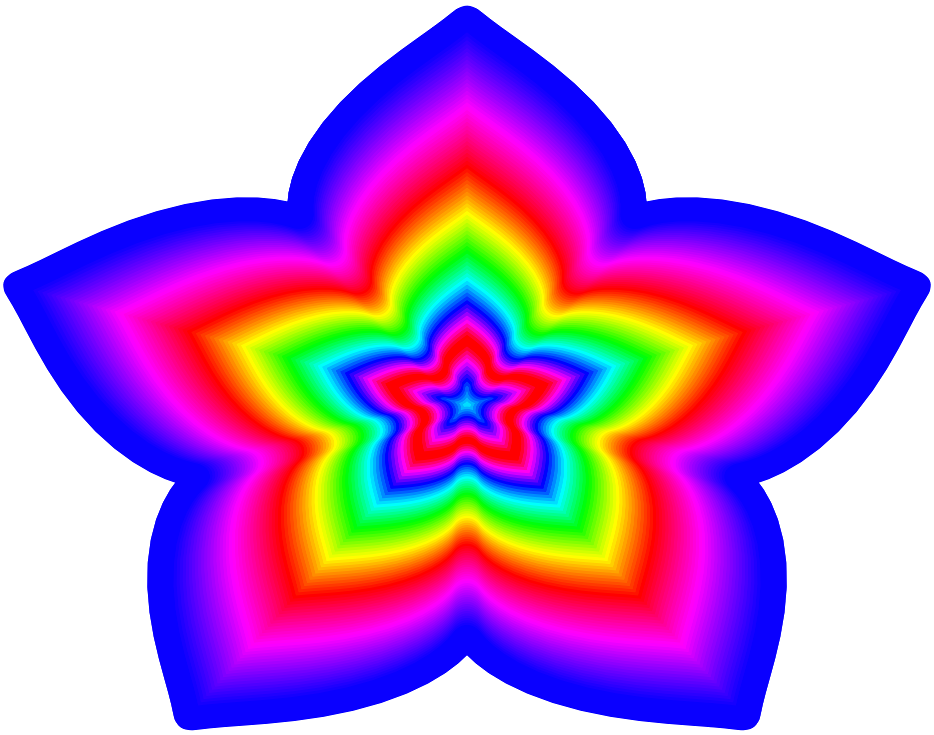
Exercices De Mathématiques sans Solutions



Omran Kouba

le 2 Janvier 2004

Introduction

L'assimilation totale des notions et des techniques nouvelles passe obligatoirement par l'exercice, c'est pour cette raison que nous avons rassembler dans ce facicule les exercices et les problèmes posés en $2^{\text{ième}}$ Années durant l'année scolaire 1991-1992. En préparant ces exercices nous avions comme objectif une meilleure compréhension du cours. Nous espérons fournir ainsi à nos étudiants un outil de travail profitable.

Omran Kouba

Table Des Matières

Analyse

Algèbre

Problèmes

Nombres réels et suites numériques

Exercice .1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n$$

Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $x_k = 1$.

Exercice .2 Pour $a \in [1, +\infty[$, simplifier

$$\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$$

Exercice .3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in [-1, 1]$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0$. Montrer que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} k\, x_k \right| \leq E(\frac{n^2}{4}).$$

Exercice .4 Montrer que

$$\forall\ n \geq 2, \qquad \frac{1}{\sqrt{4n+1}} < \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots.(2n)} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

$$\forall\ n \geq 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$$

Exercice .5 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$; tels que $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$et $\forall\ k$, $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i < \sum\limits_{i=1}^{k} b_i$. Montrr que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 < \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2$.

Exercice .6 Montrer les assertions suivantes:

- $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}, \quad E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x).$
- $\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq E(2x) - 2E(x) \leq 1.$
- $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}, \quad \sum\limits_{k=0}^{n-1} E(x + \dfrac{k}{n}) = E(nx).$
- $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad E(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = E(\sqrt{4n+2}).$

Exercice .7 Trouver la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble

$$\left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Exercice .8 Pour $n \geq 1$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

1. Montrer que $\{S_n\}_{n\geq 1}$ est une suite croissante, majorée. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$, on a

$$[n\text{Log}\,(1+\frac{1}{n})]x \leq \text{Log}\,(1+x) \leq x$$

En déduire que

$$\text{Log}\,2 \leq S_n + \frac{1}{2n} \leq \frac{\text{Log}\,2}{n\text{Log}\,(1+\frac{1}{n})}$$

et calculer $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Exercice .9 On considère les trois suites

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!} \quad \text{et} \quad w_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

1. Montrer que $\{u_n\}_{n\geq 1}$ est croissante, $\{v_n\}_{n\geq 1}$ est décroissante et qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = \lim u_n = \lim v_n$.(Cette limite n'est autre que le nombre e).
2. Montrer que

$$u_{n+1} - u_n \leq e - u_n \leq v_n - u_n$$

$$v_n - v_{n+1} \leq v_n - e \leq v_n - u_{n+3}$$

En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)!\,(e-u_n) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} (n+3)!\,(v_n - e) = 1.$$

3. En notant que $C_n^p \leq \frac{n^p}{p!}$, montrer que $w_n \leq u_n$.
4. . En remarquant que, pour $r \leq n$, on a

$$0 \leq u_n - w_n \leq \sum_{p=0}^{r} \left(\frac{1}{p!} - \frac{C_n^p}{n^p}\right) + \sum_{r+1}^{n} \frac{1}{p!}$$

montrer que w_n converge aussi vers e.

5*. Montrer, en utilisant 1. que e est irrationnel($i.e.$ $e \notin \mathbb{Q}$).

EXERCICE .10

i. Montrer que $\forall\ x \geq 0, \qquad 1 + x \leq e^x$.

ii. Montrer que la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ est décroissante sur $[1\ ,+\infty\ [$. En déduire que si $n \geq 1$ on a

$$\forall\ x \in [0, \frac{1}{n}], \qquad 1 + x \geq (1 + \frac{1}{n})\, e^{-1/n}\ e^x$$

iii. Considérons la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$v_n = \prod_{p=1}^{n}(1 + \frac{p}{n^2}) = (1 + \frac{1}{n^2})(1 + \frac{2}{n^2})\cdots(1 + \frac{n}{n^2})$$

Montrer, en utlisant les inégalités de $(i.)$ et de $(ii.)$, que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est convergente, et déterminer sa limite.

EXERCICE .11

1. Montrer que
$$\forall\ n \geq 1, \forall\ x \in [0, +\infty[, \quad x^n(n + 1 - nx) \leq 1$$
2. Montrer que
$$\forall\ a, b > 0, \qquad \sqrt[n+1]{a^n b} \leq \frac{na + b}{n + 1} \qquad (*)$$
3. Pour $x > 0$, on pose $a_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$. Montrer que pour tout $x > 0$ la suite $\{a_n(x)\}_n$ est décroissante (on pourra utiliser $(*)$).
4. En déduire que pour tout $x \geq 1$ la suite $\{a_n(x)\}_n$ converge vers une limite que l'on note $\lambda(x)$.
5. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$ la suite $\{a_n(x)\}_n$ converge aussi vers une limite que l'on note encore $\lambda(x)$.
6. Calculer $a_n(xy) - a_n(x) - a_n(y)$ en fonction de $n, a_n(x)$ et $a_n(y)$. En déduire que $\lambda(xy) = \lambda(x) + \lambda(y)$ pour tout $x, y > 0$.
7. Montrer que la fonction λ est croissante.
8. Montrer que $\forall\ x, y \geq 1, \qquad |a_n(x) - a_n(y)| \leq |x - y|$. En déduire que $|1 - a_n(e)| \leq |(1 + 1/n)^n - e|$, puis que $\lambda(e) = 1$.
9. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \text{Log}x.$$

Exercice .12 Etudier les deux suites :

$$u_n = n^2(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}), \qquad v_n = (2 - \frac{1}{n})(2 - \frac{2}{n})\dots(2 - \frac{n-1}{n}).$$

Exercice .13 Soit $\{u_n\}_n$ une suite de nombres complexes telle que $\forall\, n, \quad u_n \neq 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell \in [0,1[\quad \text{implique} \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Application : Étudier les suites :

$$u_n = \frac{a^n}{n^p}; \qquad u_n = \frac{a^n}{n!}; \qquad u_n = \frac{n!}{n^n}$$
$$u_n = \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$$

Exercice .14 On pose

$$u_n = (\frac{1}{n})^n + (\frac{2}{n})^n + \cdots + (\frac{n-1}{n})^n$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 1/(e-1)$.

Exercice .15 Soit $(u_n)_n$ une suite à termes positifs. On suppose que

$$\forall\ (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \qquad u_n \leq \frac{p}{n} + \frac{1}{p}$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exercice .16 On considère les deux suites $(S_n)_{n\geq 1}$ et $(R_n)_{n\geq 1}$ avec

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad R_n = S_n - \operatorname{Log} n.$$

1°. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a

$$\frac{x}{1+x} \leq \operatorname{Log}(1+x) \leq x$$

2°. En déduire que

$$\forall\,(m,n) \in \mathbb{N}^{*2} \qquad 0 < m < n \implies 0 \leq R_m - R_n \leq \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$$

3°. Conclure qu'il existe un nombre $\gamma \in [0,1]$ tel que

$$S_n - \operatorname{Log} n - \gamma = O(\frac{1}{n}).$$

EXERCICE .17 soit $(u_n)_n$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

En déduire que si la suite $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers une limite ℓ, alors la suite $\sqrt[n]{u_n}$ converge aussi vers ℓ.

Application: Calculer les limites des suites suivantes:

$$\sqrt[n]{C_{2n}^n}, \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}, \sqrt[n]{\frac{n(n+1)\cdots(n+n)}{n^n}}, \sqrt[n]{\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}{n^n}}, \frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}.$$

EXERCICE .18 (*lemme de Cesaro*).

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{R}_*^+$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = +\infty$. Si $(b_n)_{n\geq 1}$ est une suite de $\mathbb{C}$, On note

$$B_n = \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_k}{\sum_{k=1}^n a_k}$$

1°. On suppose que pour tout n, $b_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} B_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} B_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

2°. On suppose que la suite b_n converge vers $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que la suite B_n converge aussi vers λ.

EXERCICE .19 Soit $(a_n)_n$ une suite à termes positifs. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n S_n = 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{3n}a_n = 1$. (On pourra utiliser le lemme de Cesaro).

EXERCICE .20 Soit $(x_n)_n$ la suite à termes positifs définie par

$$x_0 > 0, \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2}$$

Démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt[3]{3n}} = 1.$$

Donner un équivalent de $x_n - \sqrt[3]{3n}$ au voisinage de $+\infty$.(On pourra utiliser le lemme Cesaro).

Généraliser ce résultat pour la suite

$$x_0 > 0, \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^{k+1}} \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

Exercice .21 Soit $\{u_n\}_n$ une suite de nombres complexes ; et soit $\{v_n\}_n$ une suite strictement croissante de réels positifs qui tend vers $+\infty$. On pose

$$S_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n}; \qquad R_n = \frac{u_n}{v_n}$$

i. On suppose dans cette question que $\forall\ n,\ u_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\varliminf_{n\to\infty} S_n \leq \varliminf_{n\to\infty} R_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} R_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} S_n.$$

ii. On ne suppose plus que $\{u_n\}_n$ est réelle. Montrer que si $\{S_n\}_n$ converge alors $\{R_n\}_n$ converge et vers la même limite.

Exercice .22 Soit $\{u_n\}_n$ une suite reelle à termes strictement positifs. On pose

$$A_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{nu_n}, \quad \text{et} \quad B_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2 u_n}.$$

On pose $t = \varliminf_{n\to\infty} A_n$ et $s = \varlimsup_{n\to\infty} A_n$. Montrer que, si $0 < t \leq s < +\infty$, alors

$$\frac{t}{1+s} \leq \varliminf_{n\to\infty} B_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} B_n \leq \frac{s}{1+t}.$$

(on pourra commencer par montrer que $\lim_{n\to\infty} n^2 u_n = +\infty$). Etudier le cas particulier $u_n = 1 + \alpha(-1)^n$, où $0 < \alpha < 1$.

Exercice .23 Etudier les suites récurrentes suivantes:

$$\begin{array}{lll}
a > 0, & u_0 > 0, & u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}). \\
a > 0, & u_0 > 0, & u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 3au_n}{3u_n^2 + a}. \\
a > 0, & u_0 \in]0, \frac{2}{a}[, & u_{n+1} = 2u_n - au_n^2. \\
a > 0, & u_0 \in]0, \sqrt{3a}[, & u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(3 - \frac{u_n^2}{a}). \\
 & u_0 > -\frac{3}{2}, & u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}. \\
a > 0, & u_0 \in \mathbb{R}, & u_{n+1} = \frac{a(1+a^2)}{1+u_n^2}. \\
a > 0, & u_0 > 0, & u_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)u_n + \frac{a}{u_n^{p-1}}\right). \quad p \in \mathbb{N},\ p \geq 2.
\end{array}$$

EXERCICE .24 Trouver les racines de l'equation $\sin 2x = x$ à 10^{-8} près.

EXERCICE .25 Soit $x_0 \in \mathbb{R}_*^+$ on définit la suite récurrente

$$\forall \quad n \geq 0 \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} x_n - \sqrt{x_0^2 + 2n} = 0$, en donnant un encadrement simple (en fonction de n et de x_0) de $x_n - \sqrt{x_0^2 + 2n}$.

EXERCICE .26 Soit $u_0 = a > 0$ et $u_1 = b > 0$. On considère la suite récurrente définie par

$$\forall \quad n \geq 1 \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n u_{n-1}}$$

Montrer que

$$u_n - \frac{1}{\sqrt{2n}} = O(\frac{1}{n}).$$

EXERCICE .27 Soit $u_0 = 0$ et On considère la suite récurrente définie par

$$\forall \quad n \geq 1 \qquad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$$

Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} u_n - \sqrt{n} = \frac{1}{2}.$$

EXERCICE .28 Pour $n \geq 0$, on pose $a_n = \dfrac{1}{2} + \sqrt{n + \dfrac{1}{4}}$. Soit la suite récurrente $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = 1 + \frac{n+1}{x_n}$$

1°. Montrer que

$$\forall\, n \geq 1, \quad 1 + \frac{n}{a_{n-1}} \leq a_{n+1}$$

$$\forall\, n \geq 0, \quad 1 + \frac{n}{a_n} = a_n$$

2°. Montrer que $\forall\, n \geq 0, \quad a_n \leq x_n \leq a_{n+1}$.

3°. En déduire une majoration de $|x_n - \sqrt{n} - 1/2|$.

4°. Est-ce que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est monotone ?

Exercice .29 Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que

$$\forall\, n, m \qquad a_{n+m} \leq a_n + a_m$$

On pose $\lambda = \inf\left\{\frac{a_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \in [-\infty, +\infty[$. Montrer que la suite $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ tend vers λ quand n tend vers l'infini.

Exercice .30 Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que

$$\forall\, n, m \qquad a_n + a_m - 1 \leq a_{n+m} \leq a_n + a_m + 1$$

1°. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $V_n^{(k)} = 2^{-n} a_{2^n k}$. En considérant $V_{n+1}^{(k)} - V_n^{(k)}$, montrer que la suite $(V_n^{(k)})_{n\geq 0}$ converge. On note sa limite λ_k.

2°. Montrer que $\lambda_k = k\lambda_1$.

3°. En déduire que $\forall\, m \in \mathbb{N}^*, \quad m\lambda_1 - 1 \leq a_m \leq m\lambda_1 + 1$.

EXERCICE .1 Donner un exemple de partie A de $\mathbb{R}$ pour laquelle les sept ensembles A, $\overline{A}$, $\mathring{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$ soient deux à deux distincts.

EXERCICE .2 Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$. Montrer que $(A \setminus B)^{\circ} = \mathring{A} \setminus \overline{B}$.

EXERCICE .3 Soient A un ouvert de $\mathbb{R}$, B une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A \cap B}$.

EXERCICE .4 Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\overline{U} = \overline{V} = \mathbb{R} \Longrightarrow \overline{U \cap V} = \mathbb{R}.$$

EXERCICE .5 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\left\{\forall\,(x, y) \in U \times U \quad \frac{x+y}{2} \in U\right\} \Longrightarrow U \quad \text{est un intervalle.}$$

EXERCICE .6 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de A. Si tout voisinage de a rencontre $A\backslash\{a\}$. c'est à dire

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), \qquad V \cap (A\backslash\{a\}) \neq \emptyset.$$

On appelle l'ensemble des points d'accumulation de A, l'ensemble dérivé de A, et on note cet ensemble A'.

i. Montrer que toute partie infinie et bornée de $\mathbb{R}$ admet un point d'accumulation.

ii. Montrer que si $A \subset \mathbb{R}$, alors A' est fermé.

iii. Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$, prouver que $(A \cup B)' = A' \cup B'$ et $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$. Prouver par un exemple que l'inclusion peut être stricte.

iv. Soit

$$A = \left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} : \quad (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\right\}.$$

déterminer $\sup A$, $\inf A$, A'. On montrera que, si $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon < \dfrac{1}{p(p+1)}$,

$$A \cap \left]\frac{1}{p+1} + \varepsilon, \frac{1}{p}\right[$$

est fini.

Exercice .7 Soit G un sous groupe du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$. On suppose que $G \neq \{0\}$. On désigne par E l'ensemble des éléments strictement positifs de G.

1°. Montrer que E admet une borne inférieure b.

2°. On suppose que $b > 0$. Montrer que $G = b\mathbb{Z}$.

3°. On suppose que $b = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice .8 Soit $\{x_n\}_n$ une suite réelle qui converge vers a. Montrer que l'ensemble $A = \{x_n : \quad n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est compact.

Exercice .9 Soient A et B deux parties compactes de $\mathbb{R}$. Montrer que de toute suite à valeurs dans $A \times B$ on peut extraire une sous-suite convergente dans $A \times B$.

Exercice .10 Soit A une partie compacte de $\mathbb{R}$, et $f : A \to A$ une fonction qui vérifie

$$\forall\ (x, y) \in A \times A, \qquad |x - y| \leq |f(x) - f(y)|$$

Montrer que $\forall\ (x, y) \in A \times A, \qquad |x - y| = |f(x) - f(y)|$, (On pourra utiliser l'exercice précédent).

Exercice .11 Soit A une partie compacte de $\mathbb{R}$, et $f : A \to A$ une fonction qui vérifie

$$\forall\ (x, y) \in A \times A, \qquad x \neq y \Longrightarrow (\qquad |f(x) - f(y)| < |x - y|)$$

Montrer qu'il existe un unique point $x \in A$ tel que $f(x) = x$. Montrer, de plus, que la suite réccurente

$$x_0 \in A, \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

converge vers le point fixe de f.

EXERCICE .12 Etudier, en tout point de $\mathbb{R}$, la continuité des applications suivantes:

a. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$.

b. $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = x + \sqrt{x - E(x)}$.

c. $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

EXERCICE .13 Trouver toutes les applications f dans chacun des cas suivants:

a. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue en 0, et $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x)\cos x$.

b. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue en -1, et $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(2x+1) = f(x)$.

c. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, et $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.

EXERCICE .14 Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

Est-ce que l'on peut remplacer la condition de continuité par une autre plus faible ?

EXERCICE .15 Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y)f(x-y) = [f(x)f(y)]^2.$$

EXERCICE .16

a. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, non constante, telle que: $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x^2) = f(x)$.

b. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue en 0 et 1, et telle que: $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante.

EXERCICE .17 Trouver tous les couples (f,g) d'applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(g(y)) \\ g(x+y) = g(x) + g(f(y)) \end{cases}$$

EXERCICE .18 Soit $(p,q) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ et $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) \neq f(1)$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que: $pf(0) + qf(1) = (p+q)f(x_0)$.

Exercice .19 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$, et soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x \in [0, 1 - \frac{1}{p}]$ tel que $f(x) = f(x + \frac{1}{p})$.

Exercice .20 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f([0,1]) \subset [0,1]$.Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice .21 Soient $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, et $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f([0,1]) \subset [0,1]$, $g([0,1]) \subset [0,1]$, et $f{\circ}g = g{\circ}f$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Exercice .22 Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une application continue.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in [0,1]$ tel que $f(a_n) = (a_n)^n$.

b. On suppose f strictement décroissante ; montrer que , pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, a_n est unique, et étudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice .23 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I. On suppose que f est injective. Montrer que f est strictement monotone.

Exercice .24 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue au point $x_0 \in \mathbb{R}$, et telle que

$$\exists c \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \forall \ x, y \in \mathbb{R}, \qquad |f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq c$$

Montrer qu'il exist $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x) - ax| \leq c.$$

Exercice .25 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $g \geq f$.

Exercice .26 Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *croissante*. Montrer que si $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante, alors f est continue.

Exercice .27 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}_*^+$ tels que $\forall \ x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x)| \leq a\,|x| + b.$

Exercice .28 Trouver une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$, qui n'est pas uniformément continue.

Exercice .29 Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est uniformément continue.

Exercice .30 Calculer les limites suivantes:

$$a)\ \lim_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right),\quad b)\ \lim_{x\to+\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right),\quad c)\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x}E\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$d)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{x},\quad e)\ \lim_{x\to 0} \frac{E(1/x)+x}{E(1/x)-x},\quad f)\ \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1}-(x+1)\right),$$

$$g)\ \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right),\quad h)\ \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)\right),$$

$$i)\ \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}-\sqrt{x}\right),\qquad j)\ \lim_{x\to+\infty} x^{3/4}\left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}\right),$$

Exercice .31 Soit $f : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^x}{E(x)^{E(x)}}.$$

Est-ce que f admet une limite en $+\infty$?

Exercice .32 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ existent dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice .33 Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$. Montrer que f atteint ses bornes supérieure et inférieure sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice .34 Soient $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue*, et $a \in \mathbb{R}^+$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(a+x)-f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ell}{a}$. Est-ce qu'on peut remplacer l'hypothèse f *continue* par f *croissante* ?

Exercice .35 Soient $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction *croissante*, et $a > 1$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(ax) - f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\operatorname{Log}(x)} = \dfrac{\ell}{\operatorname{Log}(a)}$.

Exercice .36 Soient $f : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ une fonction *continue*, telle que

$$x > 0,\ y > 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(t)}{t}$ existe et vaut $\inf\limits_{t>0} \dfrac{f(t)}{t}$.

Exercice .37 Soit f une fonction croissante sur [0,1] à valeurs dans [0,1]. Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice .38 Montrer que toute fonction lipschitzienne est la différence de deux fonctions croissantes.

Exercice .39 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,+1[$, et donner $f^{-1}(y)$, pour $y \in]-1,1[$.

Dérivation

Exercice .1 L'application $x \mapsto \cos\sqrt{x}$ est-elle dérivable à droite en 0 ?

Exercice .2 Déterminer $(a, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ pour que l'application

$$f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{si} \quad x \in \;]0, x_0[\\ \\ x^2 + 12 & \text{si} \quad x \in \;]x_0, +\infty[\end{cases}$$

soit de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Exercice .3 Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : g(x) = \frac{1}{6}(|x+2|^3 - |x|^3)$. Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Etudier et tracer le graphe de g.

Exercice .4 Calculer la dérivée n-ième de la fonction f, dans les cas suivants

$$\begin{array}{llll} f(t) = & e^{t\sqrt{3}} \sin t, & f(t) = & t^{n-1} e^{1/t} \\ f(t) = & (1 + 3t - t^2)e^t, & f(t) = & \cos^3 t \sin^2 t \end{array}$$

Exercice .5 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, et $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f_\alpha(x) = x^\alpha \operatorname{Log} x$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que: $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_\alpha^{(n)}(x) = x^{\alpha - n}(a_n \operatorname{Log} x + b_n)$. Calculer a_n, b_n en fonction de n.

Exercice .6 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fontion de classe C^∞. Montrer que, pour $t \neq 0$, on a

$$\frac{d^n}{dt^n}[t^{n-1} f(\frac{1}{t})] = \frac{(-1)^n}{t^{n+1}} f^{(n)}(\frac{1}{t}).$$

Exercice .7 On considère $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. Montrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme P_n de degré n tel que
$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(1+t^2)^n\sqrt{1+t^2}}.$$
2. Montrer que la suite $\{P_n\}_n$ vérifie
$$P_{n+1} = (1 + X^2)P_n' - (2n+1)XP_n$$
$$P_{n+1} + (2n+1)XP_n + n^2(1+X^2)P_{n-1} = 0$$
$$(1 + X^2)P_n'' - (2n-1)XP_n' + n^2 P_n = 0$$
3. Trouver une relation de récurrence permettant le calcul des coefficients de P_n.

Exercice .8 Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(a)f'(a) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0, a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice .9 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $f(a) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice .10 Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $f'(0) < 0 < f'(1)$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$. En déduire que l'image d'un intervalle par la dérivée d'une fonction dérivable sur cet intervalle est un intervalle.

Exercice .11 Soit $(a, h) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, pour chacune des fonctions $f : [a, a + h] \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes, montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, 1[$ tel que $f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$, calculer θ en fonction de a et h, et déterminer la limite de θ quand h tend vers 0, a étant fixé:

$$1^\circ.\ f : x \mapsto \sqrt{x} \qquad 2^\circ.\ f : x \mapsto x^n, \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad 3^\circ.\ f : x \mapsto \frac{1}{x} \quad (a > 0)$$

Exercice .12 Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}_*^+ \backslash \{1\}$ telle que la limite $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(ct) - f(t)}{t}$ existe. Montrer que f est dérivable en 0.

Exercice .13 Soit $f : [-a, +a] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2. Montrer que

$$\forall\, t \in [-a, +a], \qquad |f'(t)| \leq \frac{1}{2a} |f(a) - f(-a)| + \frac{a^2 + t^2}{2a} \sup_{[-a,+a]} |f''|\,.$$

Exercice .14 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^2 telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ vérifiant $\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad |f''(t)| \leq M$.

1. Montrer que $\forall\, x, y \qquad f(x) + yf'(x) + \frac{1}{2}y^2 M \geq 0$.
2. En déduire que $\forall\, t, \qquad |f'(t)| \leq \sqrt{2Mf(t)}$.

Exercice .15 Soit $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$(ou $\mathbb{C}$) de classe C^1. Montrer que

$$g(b) - g(a) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b - a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g'(a + k\frac{b - a}{n}).$$

EXERCICE .16 Soient $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante de classe C^1, et $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0, telle que $f(0) = 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} f(\frac{1}{n} g'(\frac{p}{n})) = f'(0)[g(1) - g(0)].$$

Application. Soit $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0, telle que $f(0) = 0$. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}), \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} f(\frac{1}{p+n})$$

EXERCICE .17 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable, telle que $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + f'(x)) = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$). Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

EXERCICE .18 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, $x_0 \in]a,b[$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 sur $[a,b]$, deux fois dérivable sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que:

$$f(x_0) = f(a) + (x_0 - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} + \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} f''(c).$$

EXERCICE .19 Soient $(a,h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $f : [a, a+h] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^3 sur $[a, a+h]$. Montrer qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{2}(f'(a) + f'(a+h)) - \frac{h^3}{12} f'''(a + \theta h).$$

EXERCICE .20 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, $x_0 \in]a,b[$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur $[a,b]$, trois fois dérivable sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que:

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f'''(c).$$

Exercice .21

i. Montrer qu'il existe un unique polynôme $U \in \mathbb{R}[X]$ de degré ≤ 3 vérifiant $U(0) = 0, U'(0) = 0, U(1) = 1, U'(1) = 0$.

ii. Montrer de même qu'il existe un unique polynôme $V \in \mathbb{R}[X]$ de degré ≤ 3 vérifiant $V(0) = 0, V'(0) = 0, V(1) = 0, V'(1) = 1$.

iii. Soit P un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égale à 3. On pose $Q(X) = P(1)U(X) + P'(1)V(X) + P(0)U(1-X) - P'(0)V(1-X)$. Montrer que l'on a $P = Q$.

iv. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^4. On définit le polynôme $P_f \in \mathbb{R}[X]$ par

$$P_f(X) = f(1)U(X) + f'(1)V(X) + f(0)U(1-X) - f'(0)V(1-X).$$

1. Soit $x \in]0,1[$, et soit $\phi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction de classe C^4 définie par

$$\phi(t) = f(t) - P_f(t) - \frac{t^2(1-t)^2}{24}A$$

où A est déterminé par la condition $\phi(x) = 0$.

   α. Montrer qu'il existe $t_1 \in]0,x[$, et $t_2 \in]x,1[$ tels que $\phi'(t_1) = \phi'(t_2) = 0$, et calculer $\phi'(0), \phi'(1)$.

   β. En déduire qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $\phi^{(4)}(c) = 0$.

2. Conclure que

$$\forall\, x \in [0,1], \qquad |f(x) - P_f(x)| \leq \frac{x^2(1-x)^2}{24} \sup_{t\in[0,1]} \left|f^{(4)}(t)\right|.$$

3. *Application.* On pose $f(x) = \sqrt{1+3x}$, expliciter le polynôme $P_f(x)$, et donner une valeur approximative de $\sqrt{2}$ en précisant une majoration de l'erreur commise.

Exercice .22 Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \frac{(1 + \frac{t^2}{6})\sin t - (t + \frac{t^3}{2})\cos t}{t^5}.$$

Montrer que $\lim_{t\to 0} f(t)$ existe et la calculer.

Exercice .23 Soient $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$. Montrer

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)^y < e^x < \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{x+y}.$$

Exercice .24 Déterminer $\displaystyle\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}_+^{*2}} \sqrt{x+y}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$.

Fonctions convexes, fonctions usuelles

Exercice .1 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer que f est constante.

Exercice .2

a. Montrer, pour tout $t \in]0,1[$,

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^+, \quad u^t v^{1-t} \leq tu + (1-t)v$$

avec égalité si, et seulement si, $u = v$.

b. En déduire que, pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ et tout $(b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{1/t} \right)^t \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{1/(1-t)} \right)^{1-t}.$$

étudier le cas d'égalité.(*Inégalité de Hölder*).

c. Utiliser ce qui précède pour montrer que pour tout $p \in]1, +\infty[$, et tout $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{1/p}.$$

(*Inégalité de Minkowski*).

d. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$, et $t \in \mathbb{R}_*^+$. On pose $\psi(t) = \left(\dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^t \right)^{1/t}$. Montrer que

- si $0 < s < t$, $n^{\frac{1}{t} - \frac{1}{s}} \psi(t) \leq \psi(s) \leq \psi(t)$.
- $\lim\limits_{t \overset{>}{\to} 0} \psi(t) = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$.
- $\lim\limits_{t \to +\infty} \psi(t) = \max(x_1, \dots, x_n)$.

Exercice .3 Simplifier les expressions suivantes:

$$\text{Arg ch} \sqrt{\frac{\text{ch } x + 1}{2}}; \quad \text{Arg ch } (4x^3 - 3x); \quad \text{Log} \sqrt{\frac{1 + \text{th } x}{1 - \text{th } x}} - x; \quad \text{Arg th} \sqrt{\frac{\text{ch } x - 1}{\text{ch } x + 1}};$$

Exercice .4 Démontrer les égalités suivantes:

$$\text{Arc sin } \frac{4}{5} + \text{Arc sin } \frac{5}{13} + \text{Arc sin } \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}\,.$$
$$3\text{Arc tg } (2-\sqrt{3}) = \text{Arc tg } \frac{1}{2} + \text{Arc tg } \frac{1}{3}\,.$$
$$5\text{Arc tg } \frac{1}{7} + 2\text{Arc tg } \frac{3}{79} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Exercice .5 Démontrer les relations suivantes, en précisant au besoin les domaines de validité.

$$\text{Arc tg } (\text{sh } x) = \text{Arc cos } \frac{1}{\text{ch } x}; \qquad \text{Arg th } (\text{tg } x) = \text{Arg th } (\sin 2x)\,;$$

Exercice 6. Calculer les dérivées des fontions f définies par:

$$f(t) = \text{ Arc sin } (2t\sqrt{1-t^2}); \quad f(t) = \text{ Arc tg } \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}; \quad f(t) = \text{ Arc tg } \frac{1}{2t^2}.$$

Exercice .6 Etudier et représenter grafiquement les fonctions:

$$t \mapsto \text{ Arc sin } \frac{t+\sqrt{1-t^2}}{2}; \quad t \mapsto \text{ Arc tg } \frac{2t}{1-t^2} - \text{ Arc tg } t; \quad t \mapsto \text{ Arg th } \frac{1+3\text{th } t}{3+\text{th } t}$$

Exercice .7 Discuter suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}_*^+$ l'équation $\exp(-ae^{-ax}) = x$.

Exercice .8 Si $|x| \leq 1/2$, on peut mettre $\text{Log}\,(1+x)$ sous la forme $x - \dfrac{x^2}{2} + x^3u(x)$. Déterminer la borne inférieure et la borne supérieure de $u(x)$ lorsque x parcourt l'intervalle $[-1/2, 1/2]$.

Exercice .9 Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}$, exprimer simplement $|\cos z|^2$ et $|\sin z|^2$ à l'aide des fonctions hyperboliques et circulaires de x et y. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de $\cos z = 0$ et de $\sin z = 0$.

Développements limités

Exercice .1 Calculer les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes (éventuellement prolongées par continuité en 0).

1. $f(x) = \log\left|\dfrac{\log\,(1+x)}{x}\right|$.
2. $f(x) = (1+x)^{1/x}$.
3. $f(x) = (1+2x)^{1/(1+x)}$.
4. $f(x) = (1+\sin x)^{1/x}$.
5. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$.

Exercice .2 Calculer les développements limités à l'ordre 5 au voisinage de 0 des fonctions suivantes (éventuellement prolongées par continuité en 0).

1. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$.
2. $f(x) = \log\,(\dfrac{\sin x}{x})$.
3. $f(x) = \log\,(\mathrm{tg}\,(x+\dfrac{\pi}{4}))$.
4. $f(x) = \sin(\log\,(1+x))$.
5. $f(x) = (\cos x)^{1+\sin x}$.
6. $f(x) = \dfrac{x-\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

Exercice .3 Déterminer les limites au point 0 des fonctions définies de la manière suivante:

1. $f(x) = \dfrac{\mathrm{tg}\ x-\sin x}{\sin x(\cos 2x-\cos x)}$.
2. $f(x) = \dfrac{1+2\cos^2 x-3\sqrt[3]{\cos 2x}}{\sin^4 x}$.
3. $f(x) = (\cos x)^{\log\,|x|}$.
4. $f(x) = \dfrac{(\log\ \cos x)^2}{x(\sin x-\mathrm{tg}\ x)}$.
5. $f(x) = (\exp\sqrt{x^2+x^4}-\sin x)^{\log\,x}$.
6. $f(x) = \dfrac{1}{(\mathrm{ch}\ x)^{1/\sin^2 x}}$.

7. $f(x) = \dfrac{1}{x}(\dfrac{1}{\text{th } x} - \dfrac{1}{\text{tg } x})$.

8. $f(x) = \dfrac{x^{\sin x} - (\sin x)^x}{x^{\text{sh } x} - (\text{sh } x)^x}$.

9. $f(x) = \dfrac{2(1-\cos x)\sin x - x^3(1-x^2)^{1/4}}{\sin^5 x - x^5}$.

10. $f(x) = \dfrac{e^{\sin x} - e^{\text{tg } x}}{\sin x - \text{tg } x}$.

11. $f(x) = \dfrac{(1+\sin x)^{1/x} - e^{1-x/2}}{(1+\text{tg } x)^{1/x} - e^{1-x/2}}$.

Exercice .4 Former le développemnet limité, à l'ordre et au voisinage indiqué, de la fonction définie par la formule suivante:

1. ordre 4 voisinage de 0 $f(x) = \text{Log } \dfrac{\text{th } x}{x}$
2. ordre 2 voisinage de 0 $f(x) = \text{Log }(1 + x + \sqrt{4+x})$
3. ordre 4 voisinage de 0 $f(x) = \text{Log }(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$
4. ordre 2 voisinage de 0 $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2}$
5. ordre 5 voisinage de 0 $f(x) = \text{Arc sin }(\pi \sin x)$
6. ordre 16 voisinage de 0 $f(x) = (\text{sh } x - \sin x)^2(\text{tg } x - \text{th } x)^3$
7. ordre 3 voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$ $f(x) = \text{tg } x$
8. ordre 3 voisinage de $\dfrac{\pi}{4}$ $f(x) = \sqrt{\text{tg } x}$
9. ordre 4 voisinage de 0 $f(x) = (1+\sin x)^{\cos x}$
10. ordre 5 voisinage de 0 $f(x) = \text{Arc tg }\left(\dfrac{2(1-x)}{1+4x}\right)$

Exercice .5 Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions définies de la manière suivante:

1. $f(x) = x^{1/(1+2\log x)}$.
2. $f(x) = x^2 e^{1/x} - \sqrt[3]{x^6 + 3x^5 + x^4}$.
3. $f(x) = \left(\dfrac{\log (1+x)}{\log x}\right)^x$.
4. $f(x) = x^2\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x - 4\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x} + 3\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x}\right]$.

Exercice .6 Déterminer a, b, c, d pour que $f(x)$ soit un infiniment petit d'ordre maximum et en donner un équivalent:

1. $f(x) = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + 4\log \cos \dfrac{x}{2} - \dfrac{a}{\pi - x} - b - c\log(\pi - x)$ quand $x \to \pi$.
2. $f(x) = a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x + d\cos 4x$ quand $x \to 0$.
3. $f(x) = \operatorname{Arc}\operatorname{tg} x - \dfrac{ax + bx^3}{1 + cx^2}$ quand $x \to 0$.
4. $f(x) = \cos x - \dfrac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$ quand $x \to 0$.

Exercice .7 Montrer que, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\operatorname{tg} x + \operatorname{th} x \geq 2x$. On définit, alors,

$$f(x) = \sqrt{x(\operatorname{tg} x + \operatorname{th} x - 2x)}$$

Trouver un développement limité à l'ordre 9 au voisinage de 0.

Exercice .8 Déterminer la partie principale au voisinage de 0, de la fonction définie par

$$f(x) = \sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)$$

Exercice .9 Déterminer la limite au point 0 de la fonction f définie sur $]0, 1[$ par

$$f(x) = \frac{(x^x - (\sin x)^x - x^3/6)}{x^4 \log x}.$$

Exercice .10 Soit f la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par la relation

$$f(x) = \frac{1}{x}\operatorname{Arc}\cos \frac{\sin x}{x}.$$

1. Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction g continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
2. Montrer que g admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 0.
3. Calculer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0.

Exercice .11 Pour $x \in]-1, 1[$, on considère les deux fonctions suivantes:

$$f(x) = \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x}; \qquad g(x) = \frac{30x - 8x^3}{15 - 9x^2}.$$

1°. Trouver un développement limité à l'ordre 7 au voisinage de 0 de f et de g.
En déduire $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - g(x)}{x^7}$.

2°. On pose $h(x) = f(x) - g(x)$. Ecrire $h'(x)$ sous la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont des polynômes. En déduire l'existence d'une constante A telle que

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[, \qquad 0 \leq h'(x) \leq Ax^6$$

(On demande de donner une majoration de A.)

3°. Utiliser ce qui précède pour montrer que

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[, \qquad 0 \leq h(x) \leq Ax^7$$

4°. On pose $\alpha = \operatorname{Log} \dfrac{4}{3}$ et $\beta = \operatorname{Log} \dfrac{9}{8}$.

- Exprimer $\operatorname{Log} 2$ et $\operatorname{Log} 3$ en fonction de α et de β.
- Trouver x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = \alpha$ et $f(x_2) = \beta$.
- En déduire deux nombres rationnels r_1 et r_2 qui représentent une approximation de $\operatorname{Log} 2$ et $\operatorname{Log} 3$ respectivement, en précisant une majoration de l'erreur commise.

Exercice .12 On pose

$$f_\lambda(x) = e^{-x} - \frac{(x-\lambda)^2 + \lambda}{(x+\lambda)^2 + \lambda}.$$

Déterminer une valeur λ_0 telle que $\lim_{x \to 0} \dfrac{f_{\lambda_0}(x)}{x} = 0$. Calculer ensuite $\lim_{x \to 0} \dfrac{f_{\lambda_0}(x)}{x^5}$.

Étude de fonctions

Exercice .1 Etudier et représenter graphiquement les fonctions définies par:

1. $f(x) = (x-1)\, e^{1/(x+1)}$; 2. $f(x) = (x^3 - x^2)\, e^{1/x}$;

3. $f(x) = x^{x^2-x}$; 4. $f(x) = (1+\sin x)^{1/\sin x}$;

5. $f(x) = \sqrt{1-x^2}\ \text{Arc tg } x$; 6. $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x^3}\ \text{Arc tg } x - \dfrac{1}{x^2}$;

7. $f(x) = (x^2-1)\ \text{Log } (1+1/x)$; 8. $f(x) = (x+2-1/x)\ \text{Arc tg } x$;

9. $f(x) = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$; 10. $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x}\, e^{1/x}$;

11. $f(x) = x\, e^{x/(x^2-1)}$; 12. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}\, e^{1/x}$;

13. $f(x) = \sqrt[3]{x^3+3x^2+x}$; 14. $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)$;

15. $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x+2}$; 16. $f(x) = \dfrac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}} e^{1/x}$;

17. $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{x^3-1}$; 18. $f(x) = \text{ ch } x \cos x$;

19. $f(x) = \text{ Arc tg } \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{4x^2}{2x-1}$; 20. $f(x) = \sqrt{x^2-1} - x$;

21. $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{\cos 2x}$; 22. $f(x) = \text{ Arc sin } \dfrac{(x+1)^2}{2(1+x^2)}$;

23. $f(x) = \text{ Arc tg } \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\sin x}}$; 24. $f(x) = \text{ Arc tg} \dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{x-\sqrt{1-x^2}}$;

25. $f(x) = \dfrac{\text{Arc sin } x}{4x^2-1}$; 26. $f(x) = \dfrac{\text{Arc sin } \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$;

27. $f(x) = \text{ ch } x + \cos \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{R})$; 28. $f(x) = \text{ log } \dfrac{1-x}{1-\lambda x} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$;

29. $f(x) = (\text{ ch } x + \lambda \text{ sh } x)^{1/x} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$; 30. $f(x) = \lambda^{(\lambda^x)} \quad (\lambda \in \mathbb{R}_+^*)$;

31. $f(x) = |\text{tg}\, x|^{\cos x}$; 32. $f(x) = |\text{tg}\, x|^{\sin x}$.

Exercice .2 Par convention, pour tout réel A, $\sqrt[3]{A}$ désigne l'unique réel B vérifiant $B^3 = A$.

1°. Soient a et b deux réels positifs ou nuls. On pose:

$$m(a,b) = \frac{2a+b}{3}, \qquad g(a,b) = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

En calculant $m^3(a,b) - g^3(a,b)$, trouver le signe de $m(a,b) - g(a,b)$ lorsque a est différent de b. Donner une condition nécessaire et suffisante très simple pour que $m(a,b) = g(a,b)$.

2°. Dans cette question et dans toute la suite de l'exercice, on désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On pose

1. $f_1(x) = \dfrac{3\sin x}{2+\cos x}$; 2. $f_2(x) = \dfrac{1}{3}(8\sin\dfrac{x}{2} - \sin x)$;
3. $f_3(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x \operatorname{tg} x}$; 4. $f_4(x) = \dfrac{1}{3}(2\sin x + \operatorname{tg} x)$.

Calculer les dévloppements limités, à l'ordre 5, de $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ au voisinage de 0.

En déduire l'existence d'un réel strictement positif η tel qu'on ait, pour tout $x \in]0, \eta[$, l'inégalité:

$$f_1(x) < f_2(x) < x < f_3(x) < f_4(x).$$

3°. On suppose ici que $0 < x < \frac{\pi}{2}$. quel est le signe de $f_4(x) - f_3(x)$.

4°. On pose: $u(x) = 3(2+\cos x)(f_2(x) - f_1(x))$. Montrer qu'il existe des réels α, β, γ, δ, que l'on calculera, tels que:

$$u(x) = \alpha \sin 2x + \beta \sin\frac{3x}{2} + \gamma \sin x + \delta \sin\frac{x}{2}.$$

Calculer $u'(x)$ et vérifier que $u'(x) = P(\cos\frac{x}{2})$ où P est un polynôme de degré 4. Expliciter P et le décomposer en un produit de facteurs réels. En déduire le signe de $u'(x)$, et pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, celui de $f_2(x) - f_1(x)$.

5°. On pose $v(x) = x - f_2(x)$. Calculer $v'(x)$ et montrer que $v'(x) = Q\left(\cos\frac{x}{2}\right)$ où Q est un polynôme. En déduire le signe de $v'(x)$, et pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, celui de $v(x)$.

6°. On pose $w(x) = f_3(x) - x$. Calculer $w'(x)$ et montrer que son signe est celui d'une expression trigonométrique simple. En déduire, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, le signe de $w(x)$.

Exercice .3 Etudier les courbes paramétrées $t \longrightarrow M(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ suivantes (tracé, branches infinies, points stationnaires, points multiples de la trajectoire):

1. $x(t) = t - t^3$; $y(t) = t^2 - t^4$;
2. $x(t) = \dfrac{t + t^2}{1 + t^4}$; $y(t) = \dfrac{t^2 + t^3}{1 + t^4}$;
3. $x(t) = \dfrac{3t^3 - 2t}{4(1 - t^2)}$; $y(t) = \dfrac{t^4}{2(1 - t^2)}$;
4. $x(t) = \dfrac{t + 2}{t(t^2 - 1)}$; $y(t) = \dfrac{t}{1 - t^2}$;
5. $x(t) = \cos 4t$; $y(t) = \cos 5t$;
6. $x(t) = t^2 + \dfrac{2}{t}$; $y(t) = t^2 + \dfrac{1}{t^2}$;
7. $x(t) = \dfrac{t}{t^2 - 1}$; $y(t) = \dfrac{t^2}{t - 1}$;
8. $x(t) = \dfrac{t^3}{t^2 - 9}$; $y(t) = t(t - 2)$;
9. $x(t) = \operatorname{tg} t + \sin t$; $y(t) = \dfrac{1}{\cos t}$;
10. $x(t) = \sqrt{t^2 + 3t}$; $y(t) = \sqrt{t^2 - 2t}$;
11. $x(t) = (t + 1)\exp(\dfrac{1}{t^2 - 1})$; $y(t) = (t - 1)\exp(\dfrac{1}{t^2 - 1})$;
12. $x(t) = \cos 3t$; $y(t) = \cos t + \sin t$;
13. $y(t) = \sqrt{1 + 2t\sqrt{1 - t^2}}$; $x(t) = \sqrt{1 - 2t\sqrt{1 - t^2}}$;
14. $x(t) = \dfrac{t^2 + 3t - 2}{t^2 - 3t + 2}$; $y(t) = \dfrac{t^2 + t + 2}{t^2 - t - 2}$;
15. $x(t) = (t - 1)^2 \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{1}{t}$; $y(t) = -t + \operatorname{Arc\,sin} \dfrac{2t}{t^2 + 1}$;
16. $x(t) = \sin t$; $y(t) = \dfrac{\cos^2 t}{2 - \cos t}$.

Exercice .4 Etudier l'arc paramétré représenté par

$$x(t) = \frac{1 - 2t - t^2}{1 - t}; \qquad y(t) = \frac{2 - 3t - t^2}{1 - t}.$$

Exercice .5 Soit Γ la courbe définie dans le plan affine euclidien E rapporté à un repère orthonormé défini par les relations:

$$x(t) = \frac{t^2+1}{t^3-1}; \qquad y(t) = \frac{2t}{t^3-1}.$$

1°. Construire la courbe Γ en donnant à t toutes les valeurs réelles possibles.

2°. Soit D une droite d'équation $ux + vy + 1 = 0$. Déterminer le nombre de points d'intersection de cette droite D avec la courbe Γ.

3°. Etant donné trois points M_1, M_2, M_3 définis par les valeurs t_1, t_2, t_3 du paramètre t ; à quelle condition ces points sont-ils alignés ?

4°. Soit toujours D une droite d'équation $ux+vy+1 = 0$. Déterminer la condition nécessaire et suffisante pour laquelle cette droite est tangente à Γ.

5°. Est-ce que cette courbe admet des points d'inflexion ? Quelle est la tangente en chacun de ces points ?

Exercice .6 Soit Γ l'arc paramétré défini par $x(t) = at^2; \qquad y(t) = at^3$.

1°. Déterminer le Lieu des points d'où on peut mener à Γ deux tangentes orthogonales.

2°. Déterminer le Lieu des points d'où on peut mener à Γ trois tangentes telles que le centre du cercle circonscrit au triangle formé par les points de contact soit centré sur le support de Γ.

Exercice .7 Construire la courbe parametrrée en coordonnées polaires définie par

$$\begin{cases} \theta(t) & = & t - 2\sin t \\ \rho(t) & = & \operatorname{tg}\, t \end{cases}$$

Exercice .8 Soit $\mathcal{C}$ un cardioïde d'équation $\rho = a(1+\cos\theta)$. Déterminer le lieu du point d'intersection des tangentes à $\mathcal{C}$ en deux points alignés avec le point de rebroussement.

EXERCICE .9 Considérons la courbe $\mathcal{C}$ définie en coordonnées polaires par $r = f(\theta)$, où

$$f(\theta) = \frac{2}{\cos\theta + \cos 3\theta} = \frac{1}{\cos\theta\,\cos 2\theta}$$

1°. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ présente une symétrie, préciser la, et l'utiliser pour réduire le domaine d'étude.

2°. Etudier les branches infinies et les asymptotes à la courbe en précisant la position de la courbe par rapport à elles.

3°. Donner un tableau représetant les variations de r sur le domaine d'études. Préciser sur ce même tableau le signe de r.

4°. Etudier la concavité de la courbe par rapport à l'origine, En déterminant les points d'inflexion eventuels.

5°. Donner un tracé précis de la courbe $\mathcal{C}$.

EXERCICE .10 Construire les courbes définies en coordonnées polaires par $\rho = f(\theta)$, où $f(\theta)$ admet successivement les expressions suivantes:

1.	$f(\theta) = \sin 2\theta$	2.	$f(\theta) = \sin 3\theta$	;
3.	$f(\theta) = \sin 4\theta$	4.	$f(\theta) = \sin \frac{\theta}{2}$	;
5.	$f(\theta) = \sin \frac{\theta}{4}$	6.	$f(\theta) = \operatorname{tg} 2\theta$	;
7.	$f(\theta) = \operatorname{tg} 3\theta$	8.	$f(\theta) = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$	;
9.	$f(\theta) = \operatorname{tg} \frac{\theta}{3}$	10.	$f(\theta) = \operatorname{tg} \frac{2\theta}{3}$	;
11.	$f(\theta) = \operatorname{tg} \frac{2\theta}{5}$	12.	$f(\theta) = \frac{\sin 2\theta/3}{\sin\theta + \cos\theta}$	;
13.	$f(\theta) = \cos\theta - \cos 2\theta$	14.	$f(\theta) = \cos\theta - \cos 4\theta$	;
15.	$f(\theta) = \sqrt{1-\sin 2\theta} + \sqrt{1+\sin 2\theta}$	16.	$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin 2\theta} + \sqrt{1+\sin 2\theta}}$	;
17.	$f(\theta) = \frac{\sin 2\theta}{\sin(\theta - \pi/3)}$	18.	$f(\theta) = \frac{\theta - 1}{\theta + 1}$	;
19.	$f(\theta) = \exp(\cos 2\theta) - 2\cos 4\theta$	20.	$f(\theta) = \sin 2\theta + 1$	;
21.	$f(\theta) = \frac{1}{2 - \cos 2\theta}$	22.	$f(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} + 1$	.

Exercice .11 Construire la courbe parametrrée en coordonnées polaires définie par

$$\begin{cases} \theta(t) &= t - 2\sin t \\ \rho(t) &= \operatorname{tg} t \end{cases}$$

Exercice .12 Considérons la courbe $\mathcal{C}$ définie en coordonnées polaires par $r = f(\theta)$, où

$$f(\theta) = \frac{2}{\cos\theta + \cos 3\theta} = \frac{1}{\cos\theta \, \cos 2\theta}$$

1°. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ présente une symétrie, préciser la, et l'utiliser pour réduire le domaine d'étude.

2°. Etudier les branches infinies et les asymptotes à la courbe en précisant la position de la courbe par rapport à elles.

3°. Donner un tableau représetant les variations de r sur le domaine d'études. Préciser sur ce même tableau le signe de r.

4°. Etudier la concavité de la courbe par rapport à l'origine, En déterminant les points d'inflexion eventuels.

5°. Donner un tracé précis de la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice .13 Soit $\mathcal{C}$ un cardioïde d'équation $\rho = a(1+\cos\theta)$. Déterminer le lieu du point d'intersection des tangentes à $\mathcal{C}$ en deux points alignés avec le point de rebroussement.

Exercice .14 Montrer que l'on peut mener à la cardioïde d'équation $\rho = a(1+\cos\theta)$ trois tangentes de direction donnée δ. Étudier, quand δ varie, l'Aire $\mathcal{A}_\delta$ du triangle formé par les points de contact. Déterminer aussi le lieu de l'isobarycentre m_δ de ces points.

Exercice .15 Déterminer le lieu des projections orthogonales de du pôle O sur les tangentes à la spirale logarithmique d'équation $\rho = ae^{m\theta}$.

Exercice .16 Déterminer le lieu des points par les quels passent deux tangentes orthogonales à chacune des courbes d'équations polaires : $\rho = ae^{m\theta}$, $\rho = a(1+\cos\theta)$ et enfin $\rho(1 + e\cos\theta) = p$.

Exercice .17 Déterminer le lieu. quand λ varie, des points de contact des tangentes à la conique $(\mathcal{C}_\lambda) \quad \rho(1 + e\cos\theta) = \lambda, \quad (e$ fixé) qui contiennent le point donné $O + a\mathbf{i}$.

Séries numériques

Exercice .1 Étudier les séries de termes généraux:

$$\begin{array}{llll}
v_n = & (1+\dfrac{1}{n+1})^{2n} - (1+\dfrac{2}{n+a^2})^n; & v_n = & \left(\dfrac{\text{Arc tg } n}{\text{Arc tg } (n+1)}\right)^{n^3}; \\
v_n = & (\cos\dfrac{a}{n} + \sin\dfrac{b}{n})^n - e^{ax}(1+\dfrac{b}{n}); & v_n = & (\sqrt{n^2+an+2} - \sqrt{n^2+bn+1})^n; \\
v_n = & \text{tg}\left(\dfrac{\pi n}{4n+1}\right) - \cos\dfrac{\pi}{n}; & v_n = & \text{tg}\,\dfrac{1}{n} + \text{Log}\,\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}; \\
v_n = & \left(\dfrac{\text{Log}\, n}{\text{Log}\,(n+1)}\right)^{n^2}; & v_n = & \sqrt{n^4+2n+1} - \sqrt{n^4+kn}. \\
v_n = & \dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\sum_{p=1}^{n}(\text{Log}\, p)^2; & v_n = & \sqrt{n!}\displaystyle\prod_{p=1}^{n}\sin\dfrac{1}{\sqrt{p}}.
\end{array}$$

Exercice .2 Soit p un entier plus grand que 2, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs. Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ où $b_n = p^n a_{p^n}$ sont de même nature. Etudier $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\log n)^\beta}$.

Exercice .3 Montrer les assertions suivantes:

1°. Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ sont deux séries à termes positifs convergentes. Alors $\sum\sqrt{u_n v_n}$ converge.

2°. Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Alors $\exists K>0$, tel que

$$\forall\, n\geq 1,\quad \sum_{p=1}^{n}\sqrt{u_p}\leq K\sqrt{n}$$

3°. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que $\sum n^2u_n^2$ converge. Alors $\sum u_n$ converge.

4°. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante à termes positifs telle que la série $\sum u_n$ converge. Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

5°. Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de rélles positifs tendant vers l'infinie, $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels telle que $\sum\dfrac{x_n}{a_n}$ converge. Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}x_k = 0$.

Exercice .4 Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la série de terme général $u_n = \operatorname{Log} n + a\operatorname{Log}(n+1) + b\operatorname{Log}(n+2)$ converge et calculer sa somme.

Exercice .5

1°. Soient f et g deux fonctions ayant un développement limité du premier ordre en 0 de la forme $f(x) = a + bx + o(x)$; $g(x) = a + b'x + o(x)$ où $b \neq b'$. Que peut-on dire du signe de $(f-g)(x)$ pour x assez petit positif.

2°. Trouver le développement limité de $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ au premier ordre en $\dfrac{1}{n}$ lorsque $v_n = \dfrac{1}{n^\lambda}$ où $\lambda \neq 0$ pour n tendant vers l'infinie.

3°. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs. On pose

$$L = \varlimsup_{n\to\infty} n\Big(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\Big), \qquad l = \varliminf_{n\to\infty} n\Big(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\Big)$$

Montrer que, si $L < 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge, et que si $l > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge. Que ce passe-t-il si $l \leq 1 \leq L$?

Exercice .6 Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$, et on suppose que la série $\sum a_n$ diverge. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \Big(\frac{a_k}{S_n^\alpha}\Big)$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice .7 Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs. On note

$$v_n = \frac{a_n}{(1+a_0)\cdots(1+a_n)}$$

1°. Montrer que la série $\sum v_n$ converge.

2°. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 1 \iff \text{La série } \sum a_n \text{ diverge.}$$

Exercice .8 Soit $f : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe C^1, telle que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{f'(t)}{f(t)} = -\infty$. Etudier la convergence de $\sum f(n)$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$. Trouver un équivalent de S_n.

Exercice .9 Montrer que la série de terme général $a_n = \text{Arc tg }(n+a) - \text{Arc tg } n$ est convergente. Si $f(a)$ désigne sa somme, trouver un équivalent de $f(a)$ au voisinage de l'infinie.

Exercice .10 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}.$$
Montrer que $\sum u_n$ converge. Appliquer le résultat à $u_n = \dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\dfrac{1}{2n+1}$.

Exercice .11 Soit a un réel strictement positif. On considère la série de terme général
$$v_n = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{a^n n^n} = \prod_{k=1}^{n}\frac{n+k}{an}$$
1°. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

si $a > \lambda$ la série $\sum v_n$ converge.

si $a < \lambda$ la série $\sum v_n$ diverge.

2°. Dans cette question on suppose que $a = \lambda$.

— Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \text{Log }\frac{v_{n+1}}{v_n}$ converge.

— En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ ne tend pas vers 0. Conclure.

Exercice .12 Pour $0 < a < 1$, $q \in \mathbb{N}$, et $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_q(a,n) = \frac{1-(1-a^q)^n}{1-a}.$$
1°. Montrer que $\sum_q u_q(a,n)$ converge. On note
$$S_n(a) = \sum_{q=1}^{\infty} u_q(a,n).$$
2°. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(a)}{\text{Log } n} = 1.$$
Exercice .13 Etudier la convergence de la série $\sum u_n$ de terme général
$$u_n = \cos\left(\pi n^2 \log\frac{n}{n-1}\right)$$

Omran Kouba

Calcul de primitives

Exercice .1 Calculer les primitives des fonctions définies par:

1. $f(x) = \dfrac{5x^3 + 9x^2 - 22x - 8}{x^3 - 4x}$; 2. $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$;
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 36x + 20}$; 4. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$;
5. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^3)(1+x^5)}$; 6. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{(x^2+x+1)^3}$;
7. $f(x) = \dfrac{(x^2-1)^2}{(x-2)(x^2+1)^3}$; 8. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}$;
9. $f(x) = \dfrac{1}{(2 + \cos x - 2\sin x)\sin x}$; 10. $f(x) = \dfrac{1}{5 + 3\cos x + \sin x}$;
11. $f(x) = \dfrac{1}{(2\cos^2 x - 1)\sin x}$; 12. $f(x) = \dfrac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}$;
13. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^4 x \sin^2 x}$; 14. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \sin x}$;
15. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x - \cos x}$; 16. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$;
17. $f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{1 + \cos x}$; 18. $f(x) = \dfrac{1}{\cos 5x - \cos x}$;
19. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^n x}$; 20. $f(x) = \operatorname{tg}^n x$;
21. $f(x) = \sqrt[3]{x}(2 + \sqrt{x})^2$; 22. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}(1 + \sqrt[3]{x^2})}$;
23. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}$; 24. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}$;
25. $f(x) = \dfrac{1}{x(1 + \sqrt[3]{x})^2}$; 26. $f(x) = \dfrac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}$;
27. $f(x) = x^{1/3}(2 + x^{2/3})^{1/4}$; 28. $f(x) = x^5(1+x^2)^{2/3}$;
29. $f(x) = x^{-11}(1+x^4)^{-1/2}$; 30. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}\sqrt[5]{\dfrac{x}{x+1}}$;
31. $f(x) = \dfrac{x + \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})}$; 32. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[6]{x^7}}$.

33. $f(x) = \dfrac{1}{2x + x^{2/3}(x-1)^{1/3}}$; 34. $f(x) = \dfrac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}}$;

35. $f(x) = \dfrac{1}{x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 36x + 20}$; 36. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$;

37. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$; 38. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^3}}{x^4}$;

39. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x}}$; 40. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}$;

41. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-(e^x+1)^2}}$; 42. $f(x) = 3^{\sqrt{2x+1}}$;

43. $f(x) = e^{x\sqrt{2}}\ \mathrm{tg}\ ^3 x$; 44. $f(x) = \ \mathrm{Arc\ tg}\ \sqrt{\dfrac{1+x}{3+x}}$;

45. $f(x) = \sqrt{1+x}\ \log x$; 46. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\ \mathrm{Arc\ sin}\ x$;

47. $f(x) = \dfrac{x^3\ \mathrm{Arc\ cos}\ x}{\sqrt{1-x^2}}$; 48. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Exercice .2 Soient $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on suppose que $m < n$.Déterminer une primitive $F_{n,m}$ de la fonction

$$f_{n,m}(x) = \frac{x^{2m-1}}{1+x^{2n}}$$

Calculer ensuite $\lim\limits_{x\to+\infty} F_{n,m}(x) - F_{n,m}(0)$.

Exercice .3 Soit F_n une primitive de

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^4)^n}$$

Donner une relation de récurrence permettant de calculer F_n. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la limite I_n lorsque x tend vers l'infinie de $F_n(x) - F_n(0)$ existe. Calculer I_n.

Intégration

Exercice .1 Soient E un ensemble, $\{A_n\}_{n\geq 0}$ une suite de parties de E. On pose

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n = \bigcap_{n\geq 0}\big(\bigcup_{k\geq n} A_k\big), \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n = \bigcup_{n\geq 0}\big(\bigcap_{k\geq n} A_k\big).$$

1°. Montrer que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n = \{x\in E \mid x \text{ appartient à une infinité de } A_k\text{'s}\}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n = \{x\in E \mid x \text{ appartient à tous les } A_k\text{'s à partir d'un certain rang}\}$$

2°. Soit $E = \mathbb{R}$,on pose pour $n \geq 1$ $A_{2n} = [-1, 2+1/n[$, et $A_{2n+1} =]-2-1/n, 1]$. Déterminer $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n$.

3°. Montrer que

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n, \quad E\setminus \underline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ (E\setminus A_n)$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ (A_n\cup B_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n \cup \overline{\lim_{n\to\infty}}\ B_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n \cap \overline{\lim_{n\to\infty}}\ B_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}}\ (A_n\cap B_n) \subset \overline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n \cap \overline{\lim_{n\to\infty}}\ B_n$$

Exercice .2 On dit qu'un ensemble $\mathcal{M}$ de parties d'un ensemble E est une classe monotone quand pour toute suite croissante (resp. décroissante) $\{A_n\}_{n\geq 0}$ de $\mathcal{M}$, $\cup A_n$ (resp. $\cap A_n$) appartient à $\mathcal{M}$. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de parties de E (*i.e.* $\emptyset \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est stable par réunion finie et par passage au complémentaire).

1°. Montrer qu'il existe une plus petite classe monotone $\mathcal{M}_0$ contenant $\mathcal{A}$.(qu'on appelle engendrée par $\mathcal{A}$).

On veut démontrer que $\mathcal{M}_0$ est la tribu $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ engendrée par $\mathcal{A}$.

2°. Notons $\mathcal{M}_1$ (resp. $\mathcal{M}_2$) l'ensemble des $M \in \mathcal{M}_0$ tels que $M\cup A \in \mathcal{M}_0$, pour tout $A\in\mathcal{A}$ (resp. pour tout $A \in \mathcal{M}_0$). Montrer que $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_0$ puis que $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_0$.

3°. En utilisant une méthode similaire montrer que $\mathcal{M}_0$ est stable par passage au complémentaire. Conclure.

Application: Si μ et ν sont deux mesures sur $B_{\mathbb{R}}$ coïncidant sur les intervalles, alors elles sont égales.

Exercice .3 Soit $\mathcal{T}_n$ la tribu sur $[0,1[$ engendrée par les intervalles $I_k = I_k^{(n)} = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$ où $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$.

1°. Décrire $\mathcal{T}_n$. Quel est le nombre de ses éléments.

2°. Montrer que les fonctions mesurables de $([0,1[, \mathcal{T}_n)$ dans $\mathbb{R}$ sont toutes de la forme

$$\sum_{0 \leq k < 2^n} \alpha_k \mathbb{1}_{I_k}$$

.

3°. On pose $f_\ell(x) = E(2^\ell x)$ pour $\ell = 0, 1, \ldots, n$. Montrer que f_ℓ est $\mathcal{T}_n$-mesurable. Exprimer f_ℓ comme dans 2°.

4°. On pose $\epsilon_\ell(x) = f_\ell(x) - 2f_{\ell-1}(x)$, pour $\ell = 1, \ldots, n$. Montrer que ϵ_ℓ est la fonction indicatrice d'un ensemble A_ℓ qu'on déterminera.

Exercice .4 Soit $\{f_n\}_{n\geq 0}$ une suite de fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$

$$h(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x), \qquad g(x) = \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x).$$

1°. Montrer que $h : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sont boréliennes.

2°. Montrer que $\{x \in \mathbb{R} \mid \{f_n(x)\}_{n\geq 0} \text{ converge}\}$ est un borélien.

Exercice .5

I

On se propose dans cette partie de démontrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et toute partie infinie de $\mathbb{Q}$.

1°. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $x(n) = E(\frac{\sqrt{1+8n}+1}{2})$ où $E(y)$ désigne la partie entière de y. On définit aussi

$$\Theta_1(n) = \frac{x(n)[x(n)+1]}{2} - 1 - n, \quad \text{et} \quad \Theta_2(n) = n + 1 - \frac{x(n)[x(n)-1]}{2}.$$

Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \Theta_1(n) \in \mathbb{N}, \quad \text{et} \quad \Theta_2(n) \in \mathbb{N}^*.$$

2°. Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on pose $\Psi(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2} + \beta - 1$. Montrer que $\forall\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \qquad \Psi(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}$.

3°. On considère alors les deux applications:

$$\Phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* : n \mapsto \Phi(n) = (\Theta_1(n), \Theta_2(n))$$

$$\Psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N} : (\alpha, \beta) \mapsto \Psi(\alpha, \beta)$$

Montrer que $\Psi \circ \Phi = I_{\mathbb{N}}$, et $\Phi \circ \Psi = I_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$.

4°. On considère l'application $\Lambda : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \dfrac{\Theta_1(p)}{\Theta_2(p)} & \text{si} \quad n = 2p \\ -\dfrac{\Theta_1(p)}{\Theta_2(p)} & \text{si} \quad n = 2p+1 \end{cases}$$

Montrer que Λ est surjective.

5°. Déduire de ce qui précède, qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$.

6°. Déduire qu'il existe aussi une bijection entre $\mathbb{N}$ et toute partie infinie A de $\mathbb{Q}$.

II

On se propose de démontrer dans cette partie que tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est réunion d'une suite d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On définit sur O la relation binaire :

$$x\mathcal{R}y \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists I \text{ intervalle ouvert } : x, y \in I \subset O).$$

1°. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2°. Montrer que les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ sont des intervalles ouverts.

3°. Montrer qu'il existe une partie $A \subset \mathbb{Q}$ telle que

$$\forall\ (q, p) \in A \times A, \quad p \neq q \Longrightarrow \widetilde{p} \cap \widetilde{q} = \emptyset$$

$$O = \bigcup_{q \in A} \widetilde{q}$$

Où $\widetilde{q}$ désigne la classe de q modulo $\mathcal{R}$.

4°. En utilisant **I**, montrer qu'il existe une suite d'intervalles ouverts $\{I_n\}_n$ deux à deux disjoints avec $O = \bigcup_{n \geq 0} I_n$.

Exercice .6 Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ dense dans $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue inférieure à ϵ.

Exercice .7 Soit $\{E_n\}_{n\geq 0}$ une suite d'ensembles mesurables de $(X, \mathcal{T}, \mu)$ tels que $\sum \mu(E_n) < +\infty$. Montrer que

$$\mu\big(\{x \in X \mid x \text{ appartient à une infinité de } E_n\text{'s}\}\big) = 0.$$

Exercice .8 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. Soit $\{A_n\}_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

1°. Etablir que

$$\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \mu(A_n), \qquad \mu(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n) \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \mu(A_n).$$

2°. Supposons que pour tout $x \in X$ on a: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = \mathbb{1}_A(x)$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$. Est-ce que ce résultat subsiste si $\mu(X) = +\infty$?

3°. Montrer que si $\sum \mu(A_n) < +\infty$, il existe $N \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(N) = 0$ et tel que pour tout $x \notin N$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 0$.

4°. Montrer par un contre-exemple que si l'on sait seulement que $\mu(A_n)$ tend vers 0, alors $\mathbb{1}_{A_n}$ peut bien ne tendre vers 0 en aucun point.

Exercice .9 Soit n un entier strictement positif. On note $\mathbb{N}_n = [1, n] \cap \mathbb{N}$, et $P_k^{(n)}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}_n$ qui sont de cardinal k.

1°. Montrer par récurrence sur n que pour tout $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'on a

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x a_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{B\in P_k^{(n)}} \prod_{i\in B} a_i\right) x^k.$$

2°. Soient E un ensemble fini, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On considère aussi $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $f : E \longrightarrow \{0, 1\}$. À une partie $A \subset E$ on associe l'élément $\mathbb{1}_A$ de $\mathcal{F}$ défini par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$$

a. Montrer que l'application $\Phi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{F} : A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection.

b. Montrer que

- $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A.\mathbb{1}_B$.
- $\mathbb{1}_{E\setminus A} = 1 - \mathbb{1}_A$.
- $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A.\mathbb{1}_B$.

c. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties de E, On note $A = \bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Montrer $\mathbb{1}_A = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - \mathbb{1}_{A_k})$. En déduire que

$$\mathbb{1}_A = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum_{B\in P_k^{(n)}} \prod_{i\in B} \mathbb{1}_{A_i}\right).$$

Dans la suite μ désigne une mesure positive sur $\mathcal{P}(E)$.

3°. Montrer que, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des parties de E, alors

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum_{B\in P_k^{(n)}} \mu(\bigcap_{i\in B} A_i)\right).$$

4°. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties de E. On note G_s, $(0 \le s \le n)$, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à exactement s ensembles parmis les $\{A_k\}_k$. Montrer que

$$\mu(G_s) = \sum_{k=s}^{n}(-1)^{k-s}C_k^s\left(\sum_{B\in P_k^{(n)}} \mu(\bigcap_{i\in B} A_i)\right).$$

(On pourrait commencer par montrer que si Λ est une partie à s éléments de $\mathbb{N}_n$ et si G_Λ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A_k si $k \in \Lambda$ et à $E \setminus A_k$ si $k \notin \Lambda$, alors

$$\mu(G_\Lambda) = \sum_{k=0}^{n-s}(-1)^{k}\left(\sum_{B\in P_k^{(\Lambda')}} \mu(\bigcap_{i\in B\cup\Lambda} A_i)\right)$$

où $P_k^{(\Lambda')}$ est l'ensemble des parties à k éléments de $\mathbb{N}_n \setminus \Lambda$.)

5°. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties de E. On note H_s, $(0 \leq s \leq n)$, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à au moins s ensembles parmis les $\{A_k\}_k$. Montrer que

$$\mu(H_s) = \sum_{k=s}^{n} (-1)^{k-s} C_{k-1}^{s-1} \left(\sum_{B \in P_k^{(n)}} \mu(\bigcap_{i \in B} A_i) \right).$$

6°. Soient $B \subset \mathbb{N}_n$ une partie de cardinal k, S_n le groupe symétrique. Montrer que $\text{Card}\,(\{\sigma \in S_n \ : \ \forall\, i \in B, \quad \sigma(i) = i\}) = (n-k)!$.

7°. Pour $j \in \mathbb{N}_n$ on note A_j l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$ qui laissent fixe l'élément j: $A_j = \{\sigma \in S_n \ : \ \sigma(j) = j\}$. On dit qu'une permutation σ contient une rencontre en j si $\sigma(j) = j$. Calculer le nombre r_n (respectivement, $g_n(s), h_n(s)$) des permutations qui ne contiennent pas de rencontre, (respectivement, contiennent exactement s rencontres, contiennent au moins s rencontres).

Exercice .10 On dit qu'une mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est invariante par translation si $\mu(t + A) = \mu(A)$ pour toute partie A de $\mathbb{R}$ et tout nombre réel t. (rappelons que $t+A = \{t+x \mid x \in A\}$). Montrer que si μ est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ invariante par translation et bornée sur les intervalles, alors elle est nulle. (*indication :* Soit E un ensemble ayant un élément, et un seul, dans chaque classe d'équivalence modulo la relation $x \,\Re\, y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ sur les éléments de $\mathbb{R}$. Observer que les $\{q + E\}_{q \in \mathbb{Q}}$ sont deux à deux disjoints. En déduire qu'ils sont de mesure nulle. Puis remarquer que $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q + E\,)$).

Exercice .11 Soit $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$. On munit X de la tribu $\mathcal{T}(g) = g^{-1}(B_{\mathbb{R}})$. Montrer que toute fonction $\mathcal{T}(g)$-mesurable de X dans $\mathbb{R}$ est de la forme $h \circ g$ où h est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice .12 Montrer qu'une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne.

Exercice .13 Soit A la partie de $\mathbb{R}$ formée par les x de $\mathbb{R}$ pour lesquels il existe une infinité de $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left| x - \dfrac{p}{q} \right| < \dfrac{1}{q^3}$. Montrer que la mesure de Lebesgue de A est 0.

EXERCICE .14 Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable. On suppose que $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = d_0$ existe, et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = d_\infty$ existe. Montrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ si $t \mapsto \dfrac{f(at) - f(bt)}{t}$ est integrable sur $\mathbb{R}_+$, alors

$$\int_0^\infty \frac{f(at) - f(bt)}{t}\, dt = (d_0 - d_\infty) \mathrm{Log}\, \frac{b}{a}.$$

EXERCICE .15 Soient $a > b > 0$, pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos xt\, dt$$

Montrer que $I(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer $I(x)$. (On pourra dériver sous le signe somme).

EXERCICE .16 Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b (f(t))^n\, dt \right)^{1/n} = \sup_{t \in [a,b]} f(t).$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b (f(t))^{1/n}\, dt \right]^n = \exp\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \log f(t)\, dt \right).$$

EXERCICE .17 Calculer les limites des suites suivantes:

1°. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{k}{n}\right) \log\left(\frac{k+n}{n+k-1}\right).$

2°. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n\sqrt{n}\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+k}\right)}.$

3°. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 + (-1)^k k^2}}.$

Exercice .18 Soit $f : [0, a[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction nulle en 0, dérivable à droite en 0, et soit $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} f(\frac{1}{n}g(\frac{p}{n})) = f'_d(0) \int_0^1 g(t)\, dt$$

Application: Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{p=1}^{n} (1 + \frac{1}{n}g(\frac{p}{n})) = \exp\Big(\int_0^1 g(t)\, dt\Big).$$

et calculer

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \big(\mathrm{ch}\,(\frac{1}{\sqrt{n+p}}) - 1\big).$$

Exercice .19 Utiliser les sommes de Riemann pour évaluer

$$I(z) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - e^{it}}, \qquad |z| \neq 1.$$

Calculer aussi, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$I_p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(z - e^{it})^p}, \qquad |z| \neq 1.$$

Exercice .20 Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable telle que $f(a + b - x) = f(x)$. Montrer que

$$\int_a^b x f(x)\, dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)\, dx$$

Application : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$, et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin x}\, dx$.

Exercice .21 Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(t)\, dt \leq |f'(\xi)|\,.$$

EXERCICE .22 Calculer

$$I=\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}, \qquad J=\int_0^\infty \frac{x^2dx}{1+x^4}.$$

EXERCICE .23 Soit $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, et soit $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe deux fonctions croissantes et continues h,g telles que

$$\forall\ x\in[a,b],\ \ h(x)\le f(x)\le g(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b (g(x)-h(x))\,dx<\varepsilon.$$

EXERCICE .24 On se propose dans cet exercice de calculer $I=\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$. Considérons les intégrales suivantes:

$$W_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx, \qquad I_n=\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx, \qquad J_n=\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

1°. Calculer I_n et J_n en fonction de W_n.

2°. Montrer que $\forall\ x\in[0,1],\quad 1-x^2\le e^{-x^2}$ et que $\forall\ x\in[0,+\infty],\quad e^{-x^2}\le \dfrac{1}{1+x^2}$. En déduire que

$$I_n\le \frac{I}{\sqrt{n}}\le J_n.$$

3°. Trouver une relation entre W_{n+2} et W_n, et montrer que pour tout $n\ge 1$ on a $nW_nW_{n-1}=\pi/2$.

4°. En déduire la valeur de I.

EXERCICE .25 Soit $a>0$, on pose $I_n(a)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\sin^n x\,dx$. Calculer $I_n(a)$.

EXERCICE .26 Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, on pose $I(x)=\displaystyle\int_0^\pi \log\left(1-2x\cos t+x^2\right)dt$. Calculer $I(x)$.

EXERCICE .27 Pour $x\in\mathbb{R}$ on pose $I(x)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos xt}{t^2}e^{-t}\,dt$. Montrer que $I(x)$ est définie pour tout $x\in\mathbb{R}$. Calculer $I(x)$ en dérivant sous le signe somme.

Exercice .28 Pour $x \in \mathbb{R}^+$ on pose

$$J(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\sin^2 t + x^2 \cos^2 t}}, \quad K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t \, dt}{\sqrt{\sin^2 t + x^2 \cos^2 t}}.$$

1°. Montrer que $J(x) - K(x)$ converge vers $\operatorname{Log} 2$ quand x tend vers 0 avec des valeurs positives.

2°. Calculer $K(x)$ pour $x \in]0, 1[$.

3°. En déduire $\lim_{x \to 0} (J(x) + \operatorname{Log} x)$.

Exercice .29 Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \setminus \{(0,0)\}$ on pose

$$A(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{Log}(x \sin^2 \theta + y \cos^2 \theta) \, d\theta$$

1°. Montrer que $A(x, y) = A(y, x)$, et que $A\Big((\frac{x+y}{2})^2, xy \Big) = 2A(x, y)$.

2°. On considère les deux suites $\{u_n\}_{n \geq 0}$ et $\{v_n\}_{n \geq 0}$ définies par

$$u_0 = x, \; v_0 = y, \quad , u_{n+1} = (\frac{u_n + v_n}{2})^2, \quad v_{n+1} = v_n u_n.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$ l'on a

$$\frac{1}{2^n} \operatorname{Log} v_n \leq A(u_0, v_0) \leq \frac{1}{2^n} \operatorname{Log} u_n.$$

3°. En considérant les deux suites $\{S_n\}_{n \geq 0}$ et $\{T_n\}_{n \geq 0}$ définies par

$$S_n = \sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}, \qquad T_n = \sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}$$

calculer $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{Log} v_n$, et $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{Log} u_n$. En déduire la valeur de $A(x, y)$.

Exercice .30 Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x \, dt$.

1°. Montrer que F est bien définie et continue sur $] -1, +\infty[$.

2°. Calculer $\lim_{x \to \infty} F(x)$.

3°. En considérant $J(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x \cos t \, dt$, démontrer que

$$F(x) = \frac{1}{x+1} + \log 2 + \varepsilon(x+1)$$

où $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

*4°. Déterminer un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice .31 Soit $f : [a, b] \longrightarrow [f(a), f(b)]$ une fonction continue strictement croissante.

1°. Montrer que pour tout $\alpha, \beta \in [f(a), f(b)]$ on a
$$\int_\alpha^\beta f^{-1}(t)\, dt = \beta f^{-1}(\beta) - \alpha f^{-1}(\alpha) - \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(t)\, dt.$$

2°. Soit $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une bijection continue. Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$
$$ab \leq \int_0^b g(s)\, ds + \int_0^a g^{-1}(s)\, ds.$$

Exercice .32 Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et soit $\tau \in]0, 1[$. On pose
$$I_n(f, \tau) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k+\tau}{n}) - n \int_0^1 f(t)\, dt.$$

Montrer que $I_n(f, \tau)$ admet une limite α lorsque l'on fait tendre n vers l'infini. Montrer aussi que si f est de classe C^2, alors $n(I_n(f, \tau) - \alpha)$ admet une limite β lorsque l'on fait tendre n vers l'infini. Déterminer α et β en fonction de τ, f, et f'.

Exercice .33 Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée et T-périodique. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\lim_{\nu \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) h(\nu t)\, dt = \left(\frac{1}{T}\int_0^T h(t)\, dt\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt\right).$$
(On pourrait commencer par le cas où f est la fonction indicatrice d'un intervalle.)

Exercice .34

1°. Soit $\varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, telle que $\varphi(0) = 0$. En considérant la fonction
$$g(x) = (\varphi^2(x) \operatorname{cotg} x)' + (\varphi'(x) - \varphi(x) \operatorname{cotg} x)^2$$
montrer que
$$\int_0^{\pi/2} \varphi^2(x)\, dx \leq \int_0^{\pi/2} \varphi'^2(x)\, dx.$$
Montrer qu'il y a égalité si, et seulement si, φ est de la forme $x \mapsto \lambda \sin x$.

2°. Montrer que pour toute fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, on a
$$\int_a^b \left(f(x) - f(a)\right)^2\, dx \leq \frac{4(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b f'^2(x)\, dx$$
avec égalité si, et seulement si, f est de la forme $x \mapsto \mu + \lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x-a}{b-a}\right)$.

Exercice .35 On considère les deux suites:

$$v_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}, \qquad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \qquad (n \geq 0).$$

1°. En utilisant $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k + \dfrac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n = \frac{\pi}{4}$.

2°. Montrer qu'il existe une constante M telle que, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$,on a

$$\left| \int_0^1 \frac{x^t}{1+x^2}\,dx - \frac{\pi}{4} \right| \leq Mt.$$

3°. En déduire $\displaystyle\lim_{\nu\to\infty} \nu \int_0^1 \frac{x^\nu}{1+x^{2\nu}}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

Exercice .36 Soient $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) \in]0,1[$, $\lambda \in]-\pi,\pi[$, et $t \in \mathbb{R}_+^*$. On note

$$g(z,\lambda,t) = \frac{t^{z-1}}{1+te^{i\lambda}}.$$

1°. Montrer que $t \mapsto g(z,\lambda,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose alors

$$f(z,\lambda) = \int_0^{+\infty} g(z,\lambda,t)\,dt$$

2°. Prouver que la fonction $F_z :]-\pi,\pi[\longrightarrow \mathbb{C}, \lambda \mapsto f(z,\lambda)$ est dérivable. En déduire que $H(z,\lambda) = e^{i\lambda z} f(z,\lambda)$ ne dépend pas de λ, et prouver enfin que

$$f(z,\lambda) = \frac{\pi e^{-i\lambda z}}{\sin \pi z}.$$

Indication: Utiliser, après l'avoir prouvée, la relation

$$\begin{aligned} \sin \lambda z H(z,\lambda) &= \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} t^{z-1} \left(\frac{1}{1+te^{-i\lambda}} - \frac{1}{1+te^{i\lambda}} \right) dt \\ &= \int_{\mathrm{cotg}\,\lambda}^{+\infty} \frac{(u\sin\lambda - \cos\lambda)^z}{1+u^2}\,du \quad (\text{si } \lambda > 0). \end{aligned}$$

3°. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^z}{1+2t\cos\lambda + t^2}\,dt = \frac{\pi}{\sin\lambda}.\frac{\sin\lambda z}{\sin \pi z}$, et que si $a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{t+a}\,dt = \frac{\pi a^{z-1}}{\sin \pi z}.$$

EXERCICE .37 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue.

1°. On pose $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

2°. Montrer que $\lim_{n\to\infty} nI_n = f(1)$.

3°. On suppose que $f \in C^m([0,1])$. Montrer que

$$\left| I_{n-1} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{n(n+1)\cdots(n+k)} f^{(k)}(1) \right| \leq \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m)} \sup_{[0,1]} \left| f^{(m)} \right|.$$

4°. Déduire un développement asymptotique à l'ordre 3 en $\frac{1}{n}$ de

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

EXERCICE .38 (*inégalité de Hölder*)

1°. Montrer que $\forall\, u, v \in \mathbb{R}_+^*$, et $\forall t \in]0,1[$, on a

$$u^t v^{1-t} \leq tu + (1-t)v.$$

2°. Soient $p, q \in]1, +\infty[$, avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Soient f, g deux fonctions positives et mesurables, telles que $f^p \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ et $g^q \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. Montrer que $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ et

$$\int fg\,d\mu \leq \left(\int f^p\,d\mu\right)^{1/p} \left(\int g^q\,d\mu\right)^{1/q}.$$

3°. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue à support compact (*i.e.* $\overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ est compact). On pose pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

a. Trouver $\lim_{x\to 0} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

b. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $xg' + g = f$.

c. Soit $p \in]1, +\infty[$, en effectuant une intégration par parties et en utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que

$$\int_0^{+\infty} (g(x))^p\,dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{+\infty} (f(x))^p.$$

Exercice .39 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 \sqrt{1 + n^2 x^{2(n-1)}}\, dx$. (C'est la longueur de la courbe qui représente $x \mapsto x^n$ sur $[0,1]$). On note aussi pour $y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$J(y) = \int_0^y \frac{dt}{1 + t + \sqrt{1+t^2}}.$$

1°. Montrer que $I_n = 2 - \frac{2}{n-1} J(n) + \frac{2}{n-1} \int_0^1 J(nx^{n-1})\, dx$.

2°. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 J(nx^{n-1})\, dx = 0$.

3°. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} n(I_n - 2) - \operatorname{Log} n$.

Exercice .40 On pose $f(t) = \frac{t \sin t}{1 - \cos t}$. Le but de cet exercice est le calcul de $J = \int_0^\pi f(t)\, dt$.

1°. Montrer que pour tout $t \in]0,\pi]$, $0 \leq f(t) \leq 2$, et que f est prolongeable par continuité en 0.

2°. Calculer $H(a) = \int_0^\pi \frac{dt}{1 - a\cos t}$ pour $0 \leq a < 1$.

3°. Calculer $K(x) = \int_0^\pi \frac{t \sin t}{(1 - x\cos t)^2}\, dt$ pour $0 \leq x < 1$.

4°. Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ sur $]0,1[$.

5°. On pose pour $0 \leq x < 1$:

$$\varphi(x) = \int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 - x\cos t}\, dt.$$

Calculer $\varphi(0)$, puis démontrer les inégalités

$$|\varphi(x) - J| \leq 2(1-x) \int_0^\pi \frac{dt}{1 - x\cos t}.$$

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \frac{\pi x}{1-x}.$$

6°. Démontrer que sur $]0,1[$, φ est solution de l'équation différentielle: $xy' + y = K(x)$. En déduire φ puis la valeur de J.

EXERCICE .41

1°. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^n t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On note $I(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}^n t}\, dt$.

2°. Calculer $I(1)$ et $I(2)$.

3°. Trouver une relation de récurrence entre $I(n)$ et $I(n-2)$. En déduire $I(n)$.

4°. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq m < n$. Montrer que $t \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}^m t}{\operatorname{ch}^n t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On note $J(n,m) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}^m t}{\operatorname{ch}^n t}\, dt$.

5°. Trouver une relation de récurrence entre $J(n,m)$ et $J(n-2, m-2)$, pour $n \geq 3$, et $m \geq 2$.

6°. Calculer $J(n,0)$, $J(n,1)$ et $J(n,2)$.

7°. En déduire $J(n,m)$, pour tout $n > m \geq 0$.

EXERCICE .42 On pose, pour $x \geq -1$, $G(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{Log}(1 + x\sin^2 t)\, dt$.

1°. Montrer que G est continue sur $[-1, +\infty[$ et dérivable sur $]-1, +\infty[$.

2°. Calculer $G'(x)$ pour $x \in]-1, +\infty[$.

3°. En déduire la valeur de $G(x)$, $(x \geq -1)$.

EXERCICE .43

I

1°. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On note $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}$.

2°. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. Donner la valeur de $\Gamma(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

3°. On pose

$$g_n(t) = \mathbb{1}_{[0,n]}(t)\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n, \quad \gamma_n(\alpha) = \int_0^n g_n(t)t^{\alpha-1}\, dt.$$

- Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g_n(t) \leq g_{n+1}(t) \leq e^{-t}$.
- En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \gamma_n(\alpha) = \Gamma(\alpha)$.

4°. En effectuant des intégrations par parties, montrer que

$$\begin{aligned}\gamma_n(\alpha) &= \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)(\alpha+n)} \\ &= \frac{e^{-\alpha t(n)}}{\alpha \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{\alpha}{k})\, e^{-\dfrac{\alpha}{k}}}.\end{aligned}$$

où $t(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \operatorname{Log} n$.

5°. Montrer qu'il existe une constante δ telle que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \lim_{n\to\infty} \alpha e^{\alpha\delta} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{\alpha}{k}\right) e^{-\dfrac{\alpha}{k}}.$$

6°. Dans cette question on suppose que $\alpha \in]0,1[$. Montrer que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = \lim_{n\to\infty} \alpha \prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right).$$

II

1°. Montrer, pour $n \geq 0$, que

$$\frac{1}{2i}\left[\left(1+\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1-\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1}\right] = X \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{X^2}{(2n+1)^2 \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi k}{2n+1}}\right).$$

2°. En déduire que, pour tout x dans $]0,\pi[$, $\sin x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} x \prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$.

3°. En utilisant la première partie, montrer que

$$\forall \alpha \in]0,1[, \qquad \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

4°. Montrer en particulier que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

5°. On pose

$$a_n(\alpha) = 2^\alpha \, \frac{\alpha+2n+1}{2n+1} \, \frac{\gamma_n(\frac{\alpha}{2})\gamma_n(\frac{1+\alpha}{2})}{\gamma_{2n}(\alpha)}.$$

Montrer que $a_n(\alpha)$ ne dépend pas de α. En déduire que

$$\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) = 2^{1-\alpha}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha).$$

EXERCICE .44

I

1°. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=-n}^{n} e^{-i\pi kt}$. Montrer que

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\, dt = \int_{1/2}^{1} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\, dt = \frac{1}{2}.$$

2°. Soit g une fonction continue sur $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{m\to\infty} \int_a^b g(t) \sin mt\, dt = 0$.

3°. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, dérivable à droite en 0 et à gauche en 1. On pose

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} \int_0^1 f(t)\, e^{-2i\pi kt}\, dt.$$

Montrer que

$$S_n = \int_0^1 f(t) \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\, dt.$$

En prolongeant par continuité les deux fonctions $\left]0, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \dfrac{f(t) - f(0)}{\sin \pi t}$ et $\left[\frac{1}{2}, 1\right[\longrightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \dfrac{f(t) - f(1)}{\sin \pi t}$, calculer la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4°. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\frac{1}{2} f(0) + f(1) + \cdots + f(p-1) + \frac{1}{2} f(p) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=-n}^{n} \int_0^p f(t)\, e^{-2i\pi kt}\, dt \right).$$

II

1°. On pose

$$\alpha(x) = \int_0^x \cos t^2\, dt, \quad \beta(x) = \int_0^x \sin t^2\, dt, \quad \gamma_p(x) = \int_0^x e^{2i\pi pt^2}\, dt.$$

Montrer que $\alpha(x)$, $\beta(x)$ et $\gamma_p(x)$ admettent des limites finies lorsque x tend vers l'infini. On note ces limites α, β et γ_p respectivement. Exprimer γ_p en fonction de α , β et p.

2°. Montrer que, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$\int_0^1 e^{2i\pi p(x^2 - kx)}\, dx = (-i)^{pk^2} \int_{(k-2)/2}^{k/2} e^{2i\pi pu^2}\, du.$$

En déduire $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=-n}^{n} \int_0^1 e^{2i\pi p(x^2-kx)}\, dx \right)$ en fonction de α , β et p.

3°. En applicant le résultat du **I**.4°. à la fonction $f : t \mapsto \exp(2i\pi t^2/p)$, calculer la somme de Gauss $G_p = \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2i\pi k^2}{p}}$ pour tout $p \geq 1$, et déterminer explicitement les valeurs des intégrales de Fresnel α et β.

Exercice .45 Pour α élément de $\mathbb{R}_+$, t élément de $\mathbb{R}$, on définit l'application $f_{\alpha,t}$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$f_{\alpha,t}(x) = \frac{x^\alpha e^{-tx}}{1+x^2}.$$

I

1°. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des couples (α, t) éléments de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tels que $x \mapsto f_{\alpha,t}(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Si $(\alpha, t) \in \mathcal{C}$, on note $\phi_\alpha(t)$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{\alpha,t}(x)\, dx$, et l'on définit ainsi une application ϕ_α d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par exemple ϕ_0 est définie sur $\mathbb{R}_+$.

2° *a*. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Montrer que ϕ_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \phi'_\alpha(t) = \phi_{\alpha+1}(t)$$

b. Déduire de ce qui précède que ϕ_0 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, et que l'on a

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \phi''_0(t) + \phi_0(t) = \frac{1}{t} \tag{1}$$

3° *a*. Montrer pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, les inégalités :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}_+^*, \qquad |\phi_0(t) - \phi_0(0)| \leq \frac{1}{2}ta^2 + \text{Arc tg}\,\frac{1}{a} \tag{2}$$

$$\phi_0(t) \leq \frac{1}{t} \tag{3}$$

b. En déduire que ϕ_0 est continue sur $\mathbb{R}_+$, et que $\lim_{t\to\infty} \phi_0(t) = 0$.

4°. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des applications deux fois dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \phi''_0(t) + \phi_0(t) = 1/t, \\ \lim_{t\to\infty} \phi_0(t) = 0. \end{cases}$$

a exactement un élément.

II

1°. Soient u, x des éléments de $\mathbb{R}_+^*$ tels que $u < x$, et v un réel. On pose

$$F_{u,v}(x) = \int_u^x \frac{\sin(t-v)}{t}\,dt.$$

Montrer que $F_{u,v}(x)$ admet une limite finie (notée $F(u,v)$) quand x tend vers $+\infty$, et que

$$F(u,v) = \frac{\cos(u-v)}{u} - \int_u^{+\infty} \frac{\cos(x-v)}{x^2}\,dx.$$

2°. Montrer que $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = F(t,t)$, est de classe C^∞, et que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f''(t) + f(t) = \frac{1}{t}. \tag{4}$$

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(t) = \frac{1}{t} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(t+x)^2}\,dx. \tag{5}$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0. \tag{6}$$

Que peut-on en déduire ?

3°. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $h(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$. Montrer que $h(x)$ converge vers une limite γ quand x tend vers l'infini. Montrer aussi que $f(t)$ tend vers γ quand t tend vers 0^+.

4°. Conclure que $\gamma = \pi/2$. En déduire les valeurs de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx.$$

EXERCICE .46 Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$$

1°. Démontrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, et que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. (On appliquera par exemple le théorème de convergence dominée).

2°. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (On appliquera le théorème de dérivation sur des intervalles de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$), et que l'on a

$$f'(x) - f(x) + \frac{C}{\sqrt{x}} = 0, \qquad C = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$$

3°. Résoudre cette équation et en déduire la valeur de C.

Exercice .47

I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$.

1°. Former une relation entre I_n et I_{n-2} pour $n \geq 2$.

2°. En déduire la valeur de I_{2n} et de I_{2n+1}.

3°. En remarquant que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$, établir la formule de Wallis:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{W}$$

4°. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$a_n = \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad u_n = \operatorname{Log}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

a. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\geq 1}$ converge.

b. En déduire que la suite $\{a_n\}_{n\geq 1}$ converge vers un réel $\ell > 0$.

c. Calculer ℓ en utilisant le rapport a_n^2/a_{2n} et (W).

d. En déduire la formule de Stirling:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1 \tag{S}$$

II

Dans cette partie on se propose de démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité suivante:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} > \frac{e^n}{2}.$$

On note $\phi : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\phi(x) = \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x} - 2x$$

et pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f_n(x) = x^n e^{-x}$.

1°. Montrer que $\forall\, x \in]0,1[, \quad \phi(x) > 0$.

2°. En déduire que $\forall\, x \in]0,n], \quad f_n(n+x) > f_n(n-x)$.

3°. Montrer que $\int\limits_0^n f_n(t)\, dt < \int\limits_n^{2n} f_n(t)\, dt$.

4°. Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+ \qquad \int\limits_0^x f_n(t)\,dt = n!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$$

5°. En déduire que pour n fixé $\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_0^x f_n(t)\,dt = n!$.

6°. Etablir $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} > \frac{e^n}{2}$.

III

Dans cette partie on se propose de démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

1°. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $(1-x)e^x \leq e^{-x^2/2}$.

2°. On note $g_n(x) = \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(x)\big(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\big)^n e^{x\sqrt{n}}$.

a. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad g_n(x) \leq e^{-x^2/2}$.

b. Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = e^{-x^2/2}.$$

c. Utiliser le théorème de convergence dominée pour en déduire, que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} \big(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\big)^n e^{x\sqrt{n}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

0n admet le résultat connu $\int\limits_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{\pi/2}$.

3°. En déduire la limite de la suite $\{I_n\}_n$ définie par $I_n = \sqrt{n}\int\limits_0^1 (1-t)^n e^{nt}\,dt$.

4°. Montrer que

$$I_n = \frac{e^n}{n^n\sqrt{n}}\int_0^n f_n(u)\,du$$

où f_n est la fonction définie dans **II**.

5°. En utilisant **II**.4 et la formule de Stirling (S), déduire que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Exercice .48 Soient $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on suppose que $m < n$.

1°. Déterminer une primitive $F_{n,m}$ de la fonction

$$f_{n,m}(x) = \frac{x^{2m-1}}{1+x^{2n}}$$

Calculer ensuite $\lim_{x\to+\infty} F_{n,m}(x) - F_{n,m}(0)$.

2°. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m-1}}{1+x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{2n\sin(\pi m/n)} \qquad 0 < m < n.$$

3°. En effectuant un changement de variable convenable montrer que, pour $\alpha \in \mathbb{Q} \cap\,]0,1[$

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

Calculer, ensuite, $I(\alpha)$ pour $\alpha \in]0,1[$.

4°. Pour $q \in \mathbb{N}^*$,$(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, avec $m < n$, on pose

$$J(n,m,q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{m-1}}{(1+t^n)^q}\,dt.$$

Trouver une relation simple entre $J(n,m,q+1)$ et $J(n,m,q)$. En déduire $J(n,m,q)$.

Étude métrique des courbes

Exercice .1 Montrer que les deux arcs paramétrés définies dans le plan euclidien par

$$\rho = a \sin 2\theta \qquad (0 \leq \theta \leq \pi/2);$$

$$x = 2a \cos t, \quad y = a \sin t \qquad (0 \leq t \leq \pi/2);$$

ont la même longueur.

Exercice .2 Déterminer la longueur d'un arc paramétré dont le support dans le plan euclidien a pour équation:

$$y^2(a^2 - y^2) = 8a^2x^2.$$

Exercice .3 Dans le plan euclidien, on considère l'arc de lemniscate d'équation $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ ($a > 0$ donné, $\theta \in [0, \pi/4]$). Soit $\ell(u, v)$ la longueur de l'arc de cette courbe obtenu pour $\theta \in [u, v]$, $(0 \leq u \leq v \leq \pi/4)$. On donne θ_1, θ_2 deux réels tels que $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \pi/4$. Démontrer

$$\ell(0, \theta_1) = \ell(\theta_2, \pi/4) \Longleftrightarrow \cos\theta_1 \cos\theta_2 = \sqrt{2}/2.$$

Exercice .4 Déterminer la longueur de la courbe

$$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{cases} x(t) & = & 3 - 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) & = & 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$$

Exercice .5 Chercher la longueur de l'arc $OM(t)$ où $M(t)$ décrit la courbe

$$\begin{cases} x(t) & = & 2t^3 + 3t^2 \\ y(t) & = & 3t^2 + 6t \end{cases}$$

Exercice .6 Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, on considère l'arc paramétré

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{bmatrix} a\cos t \\ \\ b\sin t \end{bmatrix}$$

($a > 0$, $b > 0$ donnés). soit t et t' deux paramétres tels que $0 < t < t' < \pi/2$ et $\operatorname{tg} t.\operatorname{tg} t' = b/a$.

- Montrer que les normales aux points $f(t)$ et $f(t')$ sont à la même distance d de l'origine O.
- Montrer que $\mathcal{L}(f|_{[0,t]}) + \mathcal{L}(f|_{[0,t']}) + d = \mathcal{L}(f)$.

Exercice .7 On considère l'arche de cycloïde Γ :

$$\begin{cases} x(t) &= t - \sin t \\ \\ y(t) &= 1 - \cos t \end{cases} \qquad (t \in [0, 2\pi])$$

de sommet $S(\pi, 2)$. Montrer que le point I intersection de la normale en $M(t)$ avec Ox, et le point J intersection de la tangente avec $y = 2$ ont le même abscisse. Montrer en suite que, si S est pris comme origine des abscisses curvilignes, l'abscisse curviligne s de M et la mesure algébrique de $\overrightarrow{MJ}$ sur la tangente orientée par t, sont liées par la relation $-s = 2\overline{MJ}$. On suppose Γ orientée dans le sens des t croissants.

Exercice .8 Trouver l'équation du plan osculateur à la courbe de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^2 + a, \quad z(t) = t^3 + 3at, \qquad (a \in \mathbb{R})$$

Exercice .9 Trouver l'équation du plan osculateur à la courbe de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$x(t) = 3t, \quad y(t) = 3t^2, \quad z(t) = 2t^3$$

Déterminer l'ensemble des points M de l'espace par les quels passent trois plans osculateurs à la courbe ; et montrer que le plan passant par les points de contact de ces plans avec la courbe passe par M.

EXERCICE .10 Déterminer le rayon de courbure et le centre de courbure en un point des arcs paramétrés définies par

$$y = 1/(a + \operatorname{ch}\frac{1}{x}), \quad \rho = \operatorname{th}\frac{\theta}{2}, \quad \rho = \frac{1}{1-\theta^2}$$

$$\begin{cases} x &= (1+\cos^2 t)\sin t \\ y &= \sin^2 t\cos t \end{cases}, \quad \begin{cases} x &= t - \operatorname{sh} t\operatorname{ch} t \\ y &= 2\operatorname{ch} t \end{cases}, \quad \begin{cases} x &= \cos^2 t + \operatorname{Log}|t| \\ y &= \sin t\cos t \end{cases}$$

EXERCICE .11 Soit $(\mathcal{H})$ une hyperbole équilatère de centre O et M son point courant. On appelle H la projection de O sur la tangente en M à $(\mathcal{H})$, K le centre de courbure en M et N le second point d'intersection de la normale en M à $(\mathcal{H})$ avec $(\mathcal{H})$. Calculer $\dfrac{\overline{OH}.\overline{MK}}{\overline{OM}^2}$ ainsi que $\dfrac{\overline{MK}}{\overline{MN}}$.

EXERCICE .12 Montrer que les centres de courbure aux points de la courbe $\rho = a\theta$ situés sur la droite $\theta = \pi/2$ et différentes de O appartiennent à deux coniques que l'on déterminera.

EXERCICE .13 déterminer le triédre de Frenet ainsi que la courbure et la torsion de l'arc paramétré γ dans les cas suivants :

$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, t)$

$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (at^2, at^3, \frac{9}{16}at^4)$

$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (a\sin t, a\cos t, bt)$

$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (4a\cos^3 t, 4a\sin^3 t, 3a\cos 2t)$

EXERCICE .14 Chercher la développée:

- d'une cardioïde $\rho = a(1-\cos\theta)$;
- d'une ellipse $t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$ où $(a > b)$;
- d'une parabole $y^2 = 2px$
- d'une cissoïde droite: $x = at^2/(1+t^2)$, $y = tx$.
- d'une strophoïde droite: $x = a(1-t^2)/(1+t^2)$, $y = tx$.

EXERCICE .15 Construire les développantes des arcs définies par:

$$\begin{cases} x = 3at^2 \\ y = 2at^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

Exercice .16 Le plan affine euclidien réel est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note Ox et Oy les axes de coordonnées associés. Dans la suite on suppose $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) = a \operatorname{ch}(x/a)$; $M(x)$ (ou M s'il n'y a pas d'ambiguité) reptrésente le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse x ; on note $s(x)$ l'abscisse curviligne de $M(x)$ sur $(\mathcal{C})$, d'origine $M(0)$, et de même signe que x.

On définit le vecteur unitaire $\overrightarrow{\tau}$ de la tangente orienté à $(\mathcal{C})$ en M par $\overrightarrow{\tau} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$; le rayon de courbure et le centre de courbure en M à $(\mathcal{C})$ sont notés R et I respctivement ; On désigne par N le point d'intersection de Ox et de la normale en M à $(\mathcal{C})$, par P la projection orthogonale de M sur Ox et par B la projection orthogonale de P sur la tangente en M à $(\mathcal{C})$.

1°.

- Calculer $s(x)$; trouver une relation entre $f(x)$, $s(x)$, et a.
- Calculer $\|\overrightarrow{PB}\|$ en fonction de a, et $\|\overrightarrow{BM}\|$ en fonction de $s(x)$.
- Calculer l'aire du domaine plan limité par les axes Ox, Oy, la droite (MP) et la courbe $(\mathcal{C})$ entre $M(0)$ et M. comparer cette aire à celle du triangle PMB.

2°. Montrer que les points I et N sont symétriques par rapport à M. Trouver une relation entre $\overrightarrow{MN}$, $f(x)$ et a.

3°. Trouver une relation entre $s(x)$, $R(x)$ et a.

4°. On considère les points variables $M_1(x_1)$ et $M_2(x_2)$ de $(\mathcal{C})$, en lesquels les tangentes à $(\mathcal{C})$ sont perpendiculaires.

- Montrer que $s(x_1)s(x_2)$ est constant et trouver sa valeur en fonction de a.
- Montrer que $\dfrac{1}{R(x_1)} + \dfrac{1}{R(x_2)}$ est constant et trouver sa valeur en fonction de a.

Équations différentielles

Exercice .1 Étudier sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes:

1. $(1-t^2)y' - ty = 1$; 2. $t^2y' + y = 1$;

3. $t(t^2-1)y' + 2y = t^2$; 4. $(t^2-1)y' - 4ty = 1$;

5. $y' \sin^3 t - 2y\cos t = 0$; 6. $ty' + 2y = t/(1+t^2)$.

Exercice .2 Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et T un réel > 0. Montrer que l'équation différentielle linéaire $y' + \lambda y = \varphi$, où $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction donnée continue et T-périodique, possède en général une et une seule solution T-périodique, qu'on explicitera. Que se passe-t-il dans les cas exceptionnels ?

Exercice .3 Résoudre les systèmes différentiels suivants:

1. $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$; 4. $\begin{cases} 2x' + y' - 3x - y = t \\ x' + y' - 4x - y = e^t \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = x + y - 3 \\ y' = -2x + 3y + 1 \\ y(0) = x(0) = 0 \end{cases}$; 6. $\begin{cases} x' = y + \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ y' = -x + \operatorname{tg} t \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 2y - x \\ y' = 4y - 3x + e^{3t}/(e^{2t}+1) \end{cases}$; 8. $\begin{cases} x' = y + t^2 \\ y' = x - t^2 \end{cases}$

Exercice .4 Résoudre les équations différentielles suivantes:

1.	$y'' - 3y' + 2y = \sin x$	;	2.	$y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$	;
3.	$y'' - 9y = e^{3x} \cos x$	;	4.	$y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$	;
5.	$y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x} \sin 2x$	;	6.	$y'' - 2y' + y = e^x / x$	;
7.	$y'' + 3y' + 2y = 1/(1 + e^x)$	;	8.	$y'' + y = 1/(\sin x)$	;
9.	$y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$	;	10.	$y'' + 2y' + y = 3e{-}x\sqrt{1+x}$	;
11.	$y'' + y = 2/(\cos^3 x)$	;	12.	$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(\cos^2 x + \operatorname{tg} x)$	.

Exercice .5 Résoudre le problème différentiel suivant:

$$y'' - 5y' + 4y = 32x^2 + 16 \cos x$$

$$y(0) = 0, \; y'(0) = 0.$$

Exercice .6 Soit E un espace vectoriel et u une application linéaire de E dans E telle que pour tout x dans E il existe un entier $n(x)$ telle que $u^n(x) = 0$ pour tout $n \geq n(x)$ (u^n désigne l'endomorphisme obtenu en itérant n fois u: $u^n = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$).

1°. Pour x dans E on pose $v(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n(x)} u^k(x)$. Montrer que v est un endomorphisme de E.

2°. Démontrer que l'endomorphisme $(i_E - u)$ admet v pour inverse.(i_E étant l'identité de E).

Dans toute la suite, on prend pour E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$, et pour u l'endomorphisme définie par $u(P) = -P''$.

3°. Soit $Q \in E$ donné. Montrer que l'équation

$$y''(x) + y(x) = Q(x) \qquad (*)$$

admet une et une seule solution polynomiale $t \mapsto R(t)$. Expliciter R en fonction de Q et de ses dérivées successives.(Utiliser 1°. et 2°.).

4°. On suppose maintenant que Q est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que

a. R est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

b. Si x^n divise $Q(x)$ alors $n!$ divise $R(0)$.

5°. En utilisant la méthode de variation de la constante, montrer que toute solution y de $(*)$ (pas forcément polynomiale) vérifie

$$y(\pi) + y(0) = \int_0^\pi Q(x) \sin x \, dx$$

6°. On suppose que Q vérifie $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad Q(\pi - x) = Q(x)$.

a. Montrer que la solution R de $(*)$ définie au 3°. est un polynôme qui vérifie $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad R(\pi - x) = R(x)$.

b. Montrer que l'on a $|R(0)| \leq \frac{\pi}{2}.M$, où $M = \sup_{0 \leq x \leq \pi/2} |Q(x)|$.

7°. On pose $Q_n(x) = x^n(\pi - x)^n$. Montrer que $R_n(0) \neq 0$ où R_n est la solution de $(*)$ définie au 3°. avec Q_n comme second membre.

8°. On se propose de démontrer (par l'absurde) que π est irrationnel. Si l'on suppose que $\pi = \dfrac{p}{q}$, montrer en utilisant ce qui précède que $\dfrac{q^n R_n(0)}{n!}$ est un entier non nul. Utiliser 6°.*b*. pour obtenir une contradiction. Conclure.

Vocabulaire des fonctions, et combinatoire

Exercice .1 On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective $f : E \to \mathcal{P}(E)$.

Exercice .2 Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$, deux applications.

1°. On suppose que $g \circ f$ est injective. Montrer que f est aussi injective.

2°. On suppose que $g \circ f$ est surjective. Montrer que g est aussi sujective.

Exercice .3 Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to E$, des applications. On suppose que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont injectives, et que $f \circ h \circ g$ est surjective. Montrer que f, g, h sont bijectives.

Exercice .4 Calculer le nombre des lois de composition internes commutatives sur un ensemble de cardinal n.

Exercice .5 On considère dans un plan, un polygone convexe de n sommets, $A_1, \ldots, A_n$. En se limitant au cas le plus général, trouver le nombre des points d'intersection des segments diagonaux.

Exercice .6 * Calculer le nombre de fonctions croissantes de $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$.

Exercice .7 Sur les trois axes d'un repère affine (O, i, j, k), on considère les points A, B, C tels que $OA = n\,i$, $OB = n\,j$, $OC = n\,k$, $(n \in \mathbb{N})$. Calculer le nombre des points à coordonnées entières intérieures au tétraèdre $OABC$.

Exercice .8 Soit A un ensemble fini de cardinal n. $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence ayant k classes d'équivalence. m est le cardinal de graphe de $\mathcal{R}$. Montrer que $n^2 \leq km$.

Exercice .9 Soit A l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. On note $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(A)} \operatorname{Card}(X)$$

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)} \operatorname{Card}(X \cap Y)$$

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)} \operatorname{Card}(X \cup Y)$$

Groupes et groupes finis

Exercice .1 Soient $(G, *)$ un groupe, et $\phi : G \to E$ une bijection. On définit, pour $x, y \in E$

$$x \top y = \phi(\phi^{-1}(x) * \phi^{-1}(y))$$

Montrer que $(E, \top)$ est un groupe isomorphe à $(G, *)$.

Application: $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$, et $\psi : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to \mathbb{R} \setminus \{1\} : x \mapsto 1 - x$.

Exercice .2 Sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E, on considère la loi

$$A \top B = (A \cup (E \setminus B)) \cap (B \cup (E \setminus A)).$$

Montrer que $(\mathcal{P}(E), \top)$ est un groupe abélien.

Exercice .3 Soit G un groupe. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall\, a \in G,\ \forall\, b \in G, \forall\, j \in \{k-1, k, k+1\},\quad (ab)^j = a^j b^j$. Montrer que G est abélien.

Exercice .4 Soit G un ensemble avec une loi de composition interne $*$ telle que

1°. $*$ est associative.

2°. $\exists\, e \in G : \quad \forall\, x \in G, \quad x * e = x.$

3°. $\forall\, x \in G, \quad \exists\, x' \in G : \quad x * x' = e.$

Montrer que G est un groupe (Si $z = x' * x$ calculer $z * z$).

Exercice .5 Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini d'ordre impaire. Montrer que l'application

$$\varphi : G \longrightarrow G : x \mapsto x^2$$

est surjective, en déduire qu'elle est bijective.

Exercice .6 On définit, dans $\mathbb{R}^2$, la loi de composition interne, notée $*$, par

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, \qquad (x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1°. Montrer que $*$ est associative, et qu'elle admet un élément neutre.

2°. Déterminer l'ensemble $\mathcal{L}$ des éléments de $\mathbb{R}^2$ symétrisables pour la loi $*$. Quelle est la structure de $(\mathcal{L}, *)$?

3°. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que l'ensemble G des éléments de $\mathcal{L}$ qui commutent avec (x_0, y_0) est un sous-groupe de $(\mathcal{L}, *)$.

Exercice .7 Soit $(B, \circ)$ le groupe des bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, et n un entier supérieure ou égal à 3. On désigne par r et s les deux éléments de B définis par

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad r(z) = z.e^{2i\pi/n}, \quad s(z) = \overline{z}$$

1°. Montrer que $r^n = e = id_{\mathbb{C}}$, $s^2 = e$, $r{\circ}s{\circ}r = s$ et $\forall p \in \mathbb{Z}, \quad r^p{\circ}s = s{\circ}r^{-p}$.

2°. Démontrer que $D = \{r^h{\circ}s^k \,|\, (h, k) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-groupe de B. En déduire que

$$\forall f \in D, \quad \exists!\ (h, k) \in \{0, 1, \cdots, n-1\} \times \{0, 1\} \ : \quad f = r^h{\circ}s^k$$

3°. Quel est l'ordre de D ?

Exercice .8 Soit $(G, +)$ un groupe commutatif, H un sous ensemble non vide de G qui vérifie

$$\forall (x, y) \in H^2, \qquad x + y \in H$$

1°. Montrer que $H^* = \{x - y \,|\, (x, y) \in H^2\}$ est un sous groupe de G.

2°. Montrer que si G est fini, H est un sous-groupe de G.

Exercice .9 Montrer que les groupes $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ et $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice .10 Soit H un sous groupe de $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{Z}^2$ et $b \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$H = \{na + mb \in \mathbb{Z}^2 : n \in \mathbb{Z}, \ \text{ et } m \in \mathbb{Z}\}.$$

Exercice .11 Soit G un groupe fini. On suppose que $\forall\, a \in G, \quad a^2 = e$ (l'élément neutre).

1°. Monrer que G est abélien.

2°. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que G soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p$.

Exercice .12 Montrer que tout groupe d'ordre premier est isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$.

Exercice .13 Soit $(G, .)$ un groupe fini d'ordre n. Montrer que $\forall\, x \in G \quad x^n = e$.

Exercice .14 Soient g_1, g_2 deux éléments d'un groupe G. Montrer que $\mathrm{ord}(g_1g_2) = \mathrm{ord}(g_2g_1)$.

Exercice .15 Soit g un élément d'un groupe G. On suppose que $\mathrm{ord}(g) = n < \infty$. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ l'ordre de g^m est $n/\mathrm{PGCD}\,(n, m)$.

Exercice .16 Soit g_1, g_2 deux éléments d'un groupe G. On suppose que $\mathrm{ord}(g_1) = n_1 < \infty$ et que $\mathrm{ord}(g_2) = n_2 < \infty$. Montrer que si $\mathrm{PGCD}\,(n_1, n_2) = 1$ et si g_1 et g_2 commutent alors $\mathrm{ord}(g_1g_2) = n_1n_2$.

Exercice .17 Soit g un élément d'un groupe G d'ordre n_1n_2, avec $\mathrm{PGCD}\,(n_1, n_2) = 1$. Montrer qu'il existe g_1 et g_2 dans G tels que $g = g_1g_2 = g_2g_1$ et $\mathrm{ord}(g_1) = n_1$, $\mathrm{ord}(g_2) = n_2$.

Exercice .18 Montrer que tout sous groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

ANNEAUX, L'ENSEMBLE DES ENTIERS RELATIFS $\mathbb{Z}$

EXERCICE .1 Soit A un anneau tel que pour tout $a, b \in A$ l'on a $(ab)^2 = a^2b^2$. Montrer que A est commutatif.

EXERCICE .2 Montrer que $\forall\ n \in\ \mathbb{Z},\quad \text{PGCD}(15n^2 + 8n + 6, 30n^2 + 21n + 13) = 1$

EXERCICE .3 On définit les entiers a_n, b_n par $a_n + \sqrt{2}b_n = (1 + \sqrt{2})^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\forall\ n,\ \text{PGCD}(a_n, b_n) = 1$.

EXERCICE .4 Soient $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, on pose $d = \text{PGCD}(b, c)$. Montrer que

$$\text{PGCD}(a^b - 1, a^c - 1) = a^d - 1$$

Montrer aussi que

$$(a^c - 1)(a^b - 1) \,\big|\, (a^d - 1)(a^m - 1)$$

Où $m = \text{PPCM}(b, c)$.

EXERCICE .5 Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad 7 \,\big|\, 2^{2^{2n}} - 2$ et $7 \,\big|\, 2^{2^{2n+1}} - 4$. En déduire que

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad 7 \,\big|\, 4^{2^{2n}} + 2^{2^{2n}} + 1.$$

EXERCICE .6 Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N} \quad 9 \,|\, 2^{2n} + 6n - 1$.

EXERCICE .7 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 121 ne divise pas $n^2 + 3n + 5$.

EXERCICE .8 Soient $n, p, q \in \mathbb{Z}$, avec p un nombre premier. Montrer que

$$p^2 \mid n^2 + (p - 2q)n + q^2 \Longrightarrow p \mid q.$$

(Noter que $n^2 + (p - 2q)n + q^2 = (n - q)(n + p - q) + pq$).

Exercice .9 Montrer que $\text{PGCD}(n^3+n, 2n+1) = 1 \Longleftrightarrow n-2 \notin 5\mathbb{Z}$.

Exercice .10 Déterminer les entiers n tels que $n+1 \mid n^2+1$.

Exercice .11 Déterminer les entiers n tels que $n-3 \mid n^3-3$.

Exercice .12 Montrer que $7 \mid a^2+b^2 \Longrightarrow 7 \mid a$ et $7 \mid b$

Exercice .13 Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N} \qquad 3^{k+1} \,\Big|\, 2^{3^k}+1$

Exercice .14 Montrer que $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$, avec $a > b$, $\qquad \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \notin \mathbb{N}$.

Exercice .15 Calculer $\text{PGCD}(2599, 1921, 1242)$.

Exercice .16 On considère les deux nombres $b = 60809$ et $a = 58483$.

i. Calculer le PGCD de a et b. On note $d = \text{PGCD}(b, a)$.

ii. Trouver $s, t \in \mathbb{N}$ tels que $sb - ta = d$.

Exercice .17 Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $F_n = 2^{2^n}+1$.

i. Montrer que si $m > n$ alors $2^{2^{n+1}}-1 \,\Big|\, F_m - 2$. En déduire que $F_n \,\Big|\, F_m - 2$.

ii. Montrer que si $m \neq n$ alors $\text{PGCD}(F_n, F_m) = 1$.

iii. Déduire de ce qui précède qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice .18 Trouver une factorisation de 46127 en produit de nombres premier. On pourra commencer par chercher b et a tels que $46127 = b^2 - a^2$.

Exercice .19 Déterminer le plus petit entier positif n tel que $n/2$ soit un carré, $n/3$ soit un cube, et $n/5$ soit une puissance cinquième.

Exercice .20 Soient p un nombre premier différent de 2, a un entier plus grand que 2. Montrer que si $p \mid a+1$, alors $p^{k+1} \mid a^{p^k}+1$.

EXERCICE .21 On considère la suite de nombres entiers $\{U_n\}_{n\geq 0}$ définie par

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 1, \qquad U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$$

i. Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{PGCD}(U_{n+1}, U_n) = 1$.

ii. Montrer que $\forall\ (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \qquad U_{n+p-1} = U_{n-1}U_{p-1} + U_nU_p$.(On pourra raisonner par récurrence sur p).

iii. Soient $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si a et c sont premiers entre eux, alors $\mathrm{PGCD}(bc, a) = \mathrm{PGCD}(b, a)$.

iv. Déduire de ce qui précède que $\forall\ n \geq 0,\ \forall\ q > 0,\ \forall\ r \geq 0$ on a

$$\mathrm{PGCD}(U_{qn+r}, U_n) = \mathrm{PGCD}(U_{(q-1)n+r}, U_n).$$

puis que

$$\mathrm{PGCD}(U_{qn+r}, U_n) = \mathrm{PGCD}(U_n, U_r).$$

v. Soit $m, n \in \mathbb{N}$, et $d = \mathrm{PGCD}(m,n)$. Montrer que $\mathrm{PGCD}(U_m, U_n) = U_d$.

EXERCICE .22 Trouver le reste de la division euclidienne de a par b dans les cas suivants

a	5^6	5^8	$(1945)^8$	5^{10}	5^{12}	$(1945)^{12}$	$(2001)^{2001}$	7^{355}	7^{355}
b	7	7	7	11	11	11	26	10	100

EXERCICE .23 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k} = 5 \bmod 7$.

EXERCICE .24 Si $\mathrm{ord}\,(a) = 3$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, alors $\mathrm{ord}\,(a+1) = 6$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.

EXERCICE .25 Soit $\mathcal{U}_n$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$, $(n \geq 3)$. Montrer que

a. Card $(\mathcal{U}_n))$=2^{n-1}.

b. $5^{2^{n-3}} = 2^{n-1} + 1 \quad (\bmod 2^n)$.

c. $\overline{5}$ d'ordre 2^{n-2} dans $\mathcal{U}_n$.

d. $x \in \mathcal{U}_n \quad \Longleftrightarrow \quad (x = 5^k)$ ou $(x = -5^k), \quad 0 \leq k < 2^{n-2}$.

e. $\mathcal{U}_n$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}$.

Exercice .26 Montrer que si $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 0 \bmod 7 \Longrightarrow abc = 0 \bmod 7$$

Exercice .27 Résoudre

◇ $91x = 84 \bmod 143$

◇ $91x = 84 \bmod 147$

◇ $\begin{cases} x &= 2 \bmod 12 \\ x &= 3 \bmod 13 \\ x &= 5 \bmod 7 \end{cases}$

◇ $\begin{cases} 3x &= 2 \bmod 5 \\ 5x &= 2 \bmod 12 \\ 17x &= 8 \bmod 19 \end{cases}$

Exercice .28 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et a un entier positif plus grand que 2. Montrer que $n \mid \phi(a^n - 1)$.

Exercice .29 Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$(m-1)! = -1 \bmod m \quad \Longleftrightarrow \quad m \text{ est premier.}$$

Exercice .30 Soit p un nombre premier différent de 2. Montrer que

$$p \in 1 + 4\mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N}, \quad \text{tel que} \quad p \mid n^2 + 1.$$

Exercice .31

1°. Soient p, q deux nombres premiers impairs. Montrer que si $q \mid a^p - 1$ alors $q \mid a - 1$ ou $q = 2kp + 1$.

2°. Montrer que $2^{17} - 1$ est premier et que $2^{29} - 1$ ne l'est pas.

Le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$

Exercice .1 Montrer que si $n \geq 2$ alors les transpositions $\{(1,i) : \quad i = 2, \cdots, n\ \}$ engendrent $\mathcal{S}_n$.

Exercice .2 Montrer que si $n \geq 2$ alors les transpositions $\{(i, i+1) : \quad i = 1, \cdots, n-1\ \}$ engendrent $\mathcal{S}_n$.

Exercice .3 Montrer que si $n \geq 2$ alors $\mathcal{S}_n$ est engendré par

$$\tau = (1,2), \qquad \text{et} \quad c_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice .4 Trouver les permutations $\sigma \in \mathcal{S}_n$ qui sont permutables avec $c_n = (1, 2, \cdots, n) \in \mathcal{S}_n$, (*i.e.* qui vérifient $\sigma \circ c_n = c_n \circ \sigma$).

Exercice .5 Soit $s \in \mathcal{S}_{10}$ la permutation $u \circ v$, où

$$u = (1,2,3,4,5), \qquad v = (6,7,8,9,10).$$

Montrer que $\{\sigma \in \mathcal{S}_{10} : \quad \sigma \circ s = s \circ \sigma\ \}$ est un sous-groupe d'ordre 50 de $\mathcal{S}_{10}$. Pouvez vous généraliser ce résultat.

Exercice .6 Soit $n \geq 3$. On se propose de démontrer que les 3-cycles engendrent le groupe alterné $\mathcal{A}_n$.

1°. Soient $a, b, c, d \in \{1, 2, \cdots, n\}$ calculer $(a,b)(c,d)$, en distinguant les différents cas.

2°. Montrer que toute permutation paire peut se mettre sous la forme d'un produit de 3-cycles. Conclure.

Exercice .7 Soit $\sigma = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ un k-cycle de $\mathcal{S}_n$, et $u \in \mathcal{S}_n$. Montrer que $u \circ \sigma \circ u^{-1} = (u(a_1), u(a_2), \cdots, u(a_k))$. En déduire que si $n \geq 5$, pour tout σ, σ' deux 3-cycles, il existe $u \in \mathcal{A}_n$ tel que $\sigma' = u \circ \sigma \circ u^{-1}$.

Exercice .8 Montrer que dans $\mathcal{S}_n$ tout k-cycle est produit d'au moins $k-1$ transpositions.

Exercice .9 Montrer que tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous groupe de $\mathcal{S}_n$.

Les nombres complexes

Exercice .1 Soient $P = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \}$ et $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$. Montrer que $f : z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ est une bijection de P sur D.

Exercice .2 Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$ déterminer le transformé du cercle centré en 0 et de rayon 1, $U = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$, par l'application $\varphi_a : z \mapsto \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$.

Exercice .3 Montrer:

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}, \quad (|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R},\ z_2 = i\lambda z_1))$$

Exercice .4 Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $|a| = |b| = 1$, $a \neq b$. Montrer

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \frac{z + ab\overline{z} - (a+b)}{a-b} \in i\mathbb{R}$$

Exercice .5 Montrer:

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus [-1, +1], \quad \exists!\, z \in \mathbb{C}, \quad \begin{cases} x = (z + 1/z)/2 \\ |z| > 1 \end{cases}$$

Exercice .6 Calculer $\displaystyle\sum_{0 \le 2k \le n} (-1)^k 3^k C_n^{2k}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice .7 Calculer les sommes $\sum_{k=1}^{p} \cos(2k-1)\theta$ et $1 + 2\sum_{k=1}^{p} \cos 2k\theta$.

Exercice .8 Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\cos k| \ge \frac{n}{4}$.

Exercice .9 Donner une expression simple, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $2n > p$, de

$$\sum_{q=0}^{2n-1} \cos^{2p}(x + \frac{q\pi}{2n}).$$

Exercice .10 Exprimer sous forme simple, pour $x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes suivantes:

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos kx, \qquad \text{et} \quad V_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin kx.$$

Exercice .11 Donner une expression simple des sommes

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^3 kx, \qquad T_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos kx}{\cos^k x}.$$

Exercice .12 Pour $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, et $p \in \mathbb{N}^*$, trouver une méthode permettant de calculer simplement les sommes:

$$S_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^{n} k^p \cos kx, \qquad T_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^{n} k^p \sin kx.$$

Application $p = 2, p = 3.$

Exercice .13 Exprimer simplement $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\cos kx \cos(k+1)x}.$

Exercice .14 Calculer simplement

$$\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3(\frac{\alpha}{3^{k+1}}), \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \mathrm{tg}(\frac{\alpha}{2^k}).$$

Exercice .15 Calculer sous forme algèbrique les racines cubiques de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Exercice .16 Montrer que $\sin \dfrac{\pi}{5} = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Exercice .17 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\omega = \exp(\dfrac{2\pi i}{n})$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la somme $\sum_{p=0}^{n-1} \omega^{kp}$. Si, d'autre part, $S = \sum_{p=0}^{n-1} \omega^{p^2}$, calculer $|S|^2$.

Exercice .18 Résoudre le système à deux inconnues réelles

$$x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6 = 1$$
$$3x^4 - 10x^2y^2 + 3y^4 = 0$$

EXERCICE .19 Montrer

- $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \quad |ab| \leq \left|\dfrac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\dfrac{a-b}{2}\right|^2$.
- $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \quad |a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|$, et étudier les cas d'égalité.

EXERCICE .20 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$; montrer

$$\frac{\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|}{1 + \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{1+|z_k|}.$$

EXERCICE .21 Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les points d'affixes a, b, c forment un triangle équilatère est que

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

EXERCICE .22 Déterminer la figure géométrique formée par les points d'affixes a, b, c, d tels que $a + c = b + d$, $a - c = i(b - d)$, en déduire qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$(z-a)^4 = (z-b)^4 = (z-c)^4 = (z-d)^4.$$

EXERCICE .23 Soit ABC un triangle, et soient A', B', C' trois points tels que les triangles ACB', BAC', CBA' soient équilatères. Montrer que le triangle formé par les barycentres des triangles ACB', BAC', CBA' est équilatère.

EXERCICE .24 Soit l'équation $z^3 + pz + q = 0$, avec $p, q \in \mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation ait une racine de module 1.

EXERCICE .25 Trouver la condition nécessaire et suffisante que doivent vérifier p et q, pour que les images des trois racines de l'équation $z^3 + pz + q = 0$ forment un triangle rectangle isocèle. Résoudre $z^3 + 12iz - 40(1 - i) = 0$.

Exercice .26 Soient $A(1,0)$, $B(-1,0)$ et M d'affixe $z \in \mathbb{C}$. On construit, à l'extérieur du triangle ABM, trois triangles rectangles isocèles AMP, ABC, BMQ d'hypoténuses AM, AB, BM, et on note $G(M)$ le centre de gravité du triangle CPQ. Reconnaître la transformation géométrique $M \mapsto G(M)$ et en préciser les éléments caractéristiques.

Exercice .27 Soit $b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $b^2 - 4c < 0$. Considérons α l'une des racines de l'équation $z^2 - bz + c = 0$. On pose $\mathbb{Z}[\alpha] = \left\{p + q\alpha \in \mathbb{C} : \quad (p,q) \in \mathbb{Z}^2\right\}$.

i. Montrer que $\mathbb{Z}[\alpha]$ est un sous-anneaux de $\mathbb{C}$. Est-ce que $\overline{\alpha}$ appartient à $\mathbb{Z}[\alpha]$.

ii. Soit $N : \mathbb{Z}[\alpha] \longrightarrow \mathbb{C}$, définie par

$$N(p + q\alpha) = (p + q\alpha)(p + q\overline{\alpha}).$$

Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{Z}[\alpha], \quad N(x) \in \mathbb{N}$, et que $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}[\alpha], \quad N(xy) = N(x)N(y)$.

iii. Soit $U(\mathbb{Z}[\alpha])$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\alpha]$.

a. Déterminer $N(U(\mathbb{Z}[\alpha]))$.

b. En déduire que $p + q\alpha \in U(\mathbb{Z}[\alpha]) \Longrightarrow q^2(4c - b^2) \leq 4$.

c. Montrer que si $4c - b^2 \notin \{3, 4\}$, alors $U(\mathbb{Z}[\alpha]) = \{+1, -1\}$.

d. Expliciter les éléments de $U(\mathbb{Z}[\alpha])$ dans les cas $4c - b^2 = 3$ et $4c - b^2 = 4$.

Les polynômes

Exercice .1 Montrer que $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n$. (On pourra écrire de deux manières le polynôme : $(X+1)^{2n}$.).

Exercice .2 Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants:

$$\begin{array}{lcl} A = X^4 + 3X^2 + X + 1 & ; & B = 2X^2 + X + 1 \\ A = X^n \sin\phi - X \sin n\phi + \sin(n-1)\phi & ; & B = X^2 - 2X\cos\phi + 1 \\ A = X^{2n} - 2X^n \cos n\phi + 1 & ; & B = X^2 - 2X\cos\phi + 1 \end{array}$$

Exercice .3 Calculer le PGCD de A et B dans les cas suivants:

$$\begin{array}{lcl} A = 2X^4 + 11X^3 + 10X^2 - 5X - 3 & ; & B = 2X^3 + 5X^2 + 5X + 3 \\ A = X^5 - 2X^4 + 2X^3 - 3X^2 + 2 & ; & B = X^4 - 2X^3 + 7X^2 - 4X + 10 \end{array}$$

Exercice .4 Déterminer les restes de la division euclidienne de $(X-3)^{2n} + (X-2)^n - 2$ par:

$$\begin{array}{llll} a) & (X-3)(X-2); & b) & (X-3)^3; \\ c) & (X-2)^2; & d) & (X-3)^2(X-2)^2. \end{array}$$

Exercice .5 Pour quelles valeurs de n le polynôme $P(X) = (X^n+1)^n - X^n$ est divisible par $X^2 + X + 1$.

Exercice .6 Pour quelles valeurs de n le polynôme $P(X) = (X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par $(X^2+X+1)^2$.

Exercice .7 Montrer que pour tout $P \in K[X]$ le polynôme $P(X)-X$ divise $P(P(X))-X$.

Exercice .8 Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$P(X) = (1+X)^{6\alpha+1} - (1+X)^{6\beta+2} + (1+X)^{6\gamma+3}$$

est divisible par $Q(X) = 1 + X + X^2$.

Exercice .9 Exhiber deux polynômes. U et V de $\mathbb{R}[X]$, vérifiant $\deg U < n$, $\deg V < m$ et

$$X^m U(X) + (1-X)^n V(X) = 1$$

Montrer qu'il existe deux réels α, β:

$$(1-X)V'(X) - nV(X) = \alpha X^{m-1} \text{ et } XU'(X) + mU(X) = \beta(1-X)^{n-1}.$$

Exercice .10 Soient $\alpha \neq \beta$ deux réels. Exhiber deux polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus égale à $2n-1$ et tels que $(X-\alpha)^{2n}U(X) + (X-\beta)^{2n}V(X) = 1$. (On pourra developper $(X-\alpha-X+\beta)^{4n-1}$).

Exercice .11 Factoriser $(X+i)^n - (X-i)^n$. En déduire une expression de

$$\prod_{k=1}^{m} (4 + \operatorname{cotg}^2 \frac{k\pi}{2m+1})$$

Exercice .12 Montrer que, si $\alpha \neq 0$,

$$X^{2n} - 2X^n \cos n\alpha + 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos(\alpha + \frac{2k\pi}{n}) + 1 \right).$$

En déduire une expression simple de la quantité

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(\cos\theta - \cos(\alpha + \frac{2k\pi}{n}) \right) .$$

Exercice .13 Résoudre l'équation: $(z+1)^n = \cos 2na + i \sin 2na$ (a réel donné, n entier donné) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. En déduire une expression simple de

$$P_n(a) = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right).$$

EXERCICE .14 Montrer, pour $n \geq 0$,

$$\frac{1}{2i}\left[\left(1+\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1}-\left(1-\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1}\right]=X\prod_{k=0}^{n}\left(1-\frac{X^2}{(2n+1)^2\ \mathrm{tg}^2\,\frac{\pi k}{2n+1}}\right) \qquad (*)$$

En déduire que, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\sin x = \lim\limits_{n\to+\infty} x\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2k^2}\right)$.

Utiliser $(*)$ pour calculer aussi

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{cotg}^2\,\frac{\pi k}{2n+1}; \qquad \sum_{k=1}^{n}\sin^{-2}\frac{\pi k}{2n+1}$$

En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$.

EXERCICE .15 Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\delta = \mathrm{PGCD}(n,m)$, et $\mu = \mathrm{PPCM}(n,m)$. Montrer que $\mathrm{PGCD}(X^n-a^n, X^m-a^m) = X^\delta - a^\delta$. En déduire que $(X^m-a^m)(X^n-a^n)$ divise $(X^\delta-a^\delta)(X^\mu-a^\mu)$.

EXERCICE .16 Montrer que dans $\mathbb{Q}[X]$, il n'existe qu'un polynôme P_n tel que $P_n - P_n' = X^n$.

EXERCICE .17 Soit $\alpha = \dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}$, et soit P le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par

$$P(X) = X^3 + \alpha X^2 - \overline{\alpha}X - 1$$

1°. Montrer que $P(X)$ divise $P(X^2)$.

2°. Soit a une racine de P dans $\mathbb{C}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a^{2^n} est une racine de P.

3°. En déduire que toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont de module 1.

4°. Soit a une racine de P dans $\mathbb{C}$. Montrer que (a, a^2, a^4) est un système de racines de P. Montrer que $a^8 = a$.

5°. Soit (x_1, x_2, x_3) un système de racines de P, et soit $\omega = e^{2\pi i/7}$. Montrer que l'ensemble $\{x_1, x_2, x_3\}$ est égale soit à $\{\omega, \omega^2, \omega^4\}$, soit à $\{\omega^3, \omega^5, \omega^6\}$. A quoi est égale la partie imaginaire de $x_1 + x_2 + x_3$?

6°. Quelles sont les racines de P, et leurs ordres de multiplicité respectifs ?

Exercice .18 Soit $\mathbb{Z}[X]$ le sous-anneau de $\mathbb{Q}[X]$ formé des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$, on note $\mathcal{C}(P) = \mathrm{PGCD}(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ et on appelle cette quantité le contenue de P. On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ est primitif si $\mathcal{C}(P) = 1$.

1°. Montrer que le produit de deux polynômes primitifs de $\mathbb{Z}[X]$ est aussi un polynôme primitif.

2°. Montrer que, $\forall\ P, Q \in \mathbb{Z}[X], \quad \mathcal{C}(P)\mathcal{C}(Q) = \mathcal{C}(PQ)$.

3°. Soit P un polynôme primitif de $\mathbb{Z}[X]$. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ si et seulement s'il est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$. (*i.e.* il n'est pas égale au produit de deux polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ de degrés respectifs strictement inférieurs à celui de P).

Exercice .19 Montrer que le polynôme $P(X) = X^3 + 3X - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice .20 Factoriser dans $\mathbb{Q}[X]$ le polynôme $P(X) = X^5 + X + 1$.

Exercice .21 Trouver les triplets (P,Q,R) de $\mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P^2 + Q^2 = R^2$.

Exercice .22 Déterminer $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré n, sachant que $(X-1)^p$ divise $P(X) + a$ et $(X+1)^q$ divise $P(X) - a$, où $p, q \in \mathbb{N}^*$ et vérifient $p + q = 1 + n$. *Application*: Déterminer P lorsque $n = 7$ et $p = q = 4$.

Exercice .23 (Polynômes de Tchebychev).

1°. Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n de degré $n \in \mathbb{N}$ tel que $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Quel est le coefficient de X^n dans T_n. On définit aussi $U_n = \dfrac{1}{n+1} T'_{n+1}$. Quelle est la valeur de $U_n(\cos\theta)$ en fonction de θ.

2°. Déterminer les zéros de T_n et de U_n. Montrer en pariculier qu'ils sont tous dans $]-1, 1[$.

3°. Démontrer les relations suivantes, pour tout $n \geq 1$:

$$T_{n+1}(X) = XT_n(X) - (1 - X^2)U_{n-1}(X)$$

$$U_n(X) = XU_{n-1}(X) + T_n(X)$$

4°. Montrer que les polynômes T_n et U_n vérifient les équations différentielles suivantes:

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0.$$

$$(1-x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n(n+2)U_n(x) = 0.$$

En déduire le calcul des coefficients de T_n.

5°. Montrer que les polynômes T_n et U_n vérifient les relations de récurence suivantes:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) \quad \text{avec} \quad T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x.$$

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) \quad \text{avec} \quad U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x.$$

6°. On pose $V_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}\Big((1-x^2)^{n-1/2}\Big)$. Montrer

$$nV_n(x) = (2n+1)[(1-x^2)V_n'(x) - (n+1)xV_n(x)].$$

On pose $W_n(x) = \lambda_n\sqrt{1-x^2}V_n(x)$. Montrer que l'on peut choisir λ_n pour que $W_n = T_n$. En déduire une nouvelle expression de T_n.

*7°. Soit f une fonction de classe C^n sur $[-1,1]$. Montrer en effectuant des intégrations par parties successives que

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}\, f^{(n)}(x)\, dx.$$

En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\int_0^{\pi} f(\cos\theta)\cos n\theta\, d\theta = \frac{2^n\, n!}{(2n)!}\int_0^{\pi} f^{(n)}(\cos\theta)\sin^{2n}\theta\, d\theta.$$

Etudier le cas $f = T_m$.

EXERCICE .24 Dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^3 + px + q = 0$ $(q \neq 0)$ admet trois racines a, b, c.

1°. Quel est le nombre des valeurs prises par la somme $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$?

2°. Former l'équation algèbrique admettant ces valeurs pour racines.

Exercice .25 Soit le polynôme $x^3 + px + q = 0$ $(q \neq 0)$ de $\mathbb{C}[X]$, de racines a, b, c. Calculer

$$\frac{a^2+b^2}{c^2} + \frac{b^2+c^2}{a^2} + \frac{c^2+a^2}{b^2}.$$

Exercice .26 Déterminer le nombre complexe λ de telle sorte que l'équation

$$Z^4 - 2Z^2 + \lambda Z + 3$$

ait deux racines dont le produit soit 1. Résoudre alors cette équation.

Fractions rationnelles

Exercice .1 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes (n et m sont des entiers naturels non nuls):

$$\frac{1}{(X^2-1)^2} \quad ; \quad \frac{1}{(X-2)^2(X-3)^3} \quad ;$$
$$\frac{1}{(X-a)^n(X-b)^m} \quad ; \quad \frac{X^{2n}}{(X^2+1)^n} \quad ;$$
$$\frac{1}{(X-1)(X-2)\cdots(X-n)} \quad ; \quad \frac{1}{(X+1)^7-X^7-1} \quad ;$$

Exercice .2 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes (n est un entier naturel non nul):

$$\frac{X^2}{X^4-2\cos(\alpha)X^2+1}, \quad (\alpha \in \mathbb{R}); \quad \frac{1}{X^8+X^4+1} \quad ;$$
$$\frac{X^2-X+4}{(X-1)^4(X^2+X+1)^2} \quad ; \quad \frac{1}{(X^3-1)^3} \quad ;$$
$$\frac{1}{(X^4-1)^2} \quad ; \quad \frac{1}{(X^2-1)^n} \quad ;$$
$$\frac{X^6-X^2+1}{(X-1)^3} \quad ; \quad \frac{X^7+5}{(X^2+X+1)^2(X+2)^3} \quad ;$$
$$\frac{X^5+64}{(X^2+2X+4)^3} \quad ; \quad \frac{1}{X}+\frac{1!}{X(X+1)}+\cdots+\frac{n!}{X(X+1)\cdots(X+n)} \quad ;$$

Exercice .3 Calculer les dérivées n-ièmes des fractions rationnelles suivantes de $\mathbb{C}(X)$:

$$\frac{1}{X(X+1)\cdots(X+m)} \; ; \; \frac{1}{X^2-2\cos(\alpha)X+1} \; ; \; \frac{1}{X^2-2\mathrm{sh}\,(\alpha)X-1}$$

Exercice .4 Simplifier les sommes de fractions rationnelles suivantes:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(X+k)(X+k+1)}$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(X+k)(X+k+1)(X+k+2)}$;
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{(X+2^k)(X+2^{k+1})}$.

Exercice .5 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X^3+2X+1}{(X-1)^2(X^2+1)^4}$$

Exercice .6 Soit $f :]-1,+1[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \text{ Arc tg } \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$$

1°. Montrer qu'il existe une fraction rationnelle $F(X) \in \mathbb{R}(X)$ telle que $f'(t) = F(t)$ pour tout $t \in]-1,+1[$. Décomposer $F(X)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

2°. Déduire de ce qui précède qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, x \in]-1,+1[, \qquad f(x) = \frac{\pi}{4} + \text{ Arc tg}\, \alpha x + \text{ Arc tg}\, \beta x$$

3°. Donner un développement limité à l'ordre n de la fonction f au voisinage de 0.

4°. Reprendre l'étude précédente pour la fonction $g :]-1,+1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \text{ Arc tg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^m \qquad (m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}).$$

Exercice .7 Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $\alpha_k = \exp\left(\dfrac{2i\pi k}{n}\right)$.

1°. Vérifier: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-\alpha_k} = \frac{nX^{n-1}}{X^n-1}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X-\alpha_k} = \frac{n}{X^n-1}$.

2°. Simplifier: $\displaystyle F(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^3}{(X-\alpha_k)^2}, \quad G(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^2-\alpha_{k-2}X+\alpha_{k+2}}{(X-\alpha_k)^2}$.

Exercice .8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe $F \in \mathbb{R}(X)$ telle que:

$$\forall\, \varphi \in \mathbb{R}, \qquad \text{th}\, n\varphi = F(\text{ th}\, \varphi).$$

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle F.

Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice .1 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On considère une suite de polynômes $\{P_n\}_{n\geq 0}$ de degrés deux à deux distincts. Montrer que la suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est libre.

Exercice .2 Dans l'espace vectoriel des application continues de $]0,1[\mapsto \mathbb{R}$. Etudier la dépendance linéaire du système $\{f, f\circ f, f\circ f\circ f\}$ où $f = \log(1+x)$.

Exercice .3 Dans l'espace vectoriel des application continues de $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Etudier la dépendance linéaire de la famille $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ où $f_\alpha(x) = |x-\alpha|$.

Exercice .4 Dans l'espace vectoriel des application continues de $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Etudier la dépendance linéaire de la famille $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}^+}$ où $f_\alpha(x) = \cos\alpha x$. (On pourra calculer $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \cos\alpha x\cos\beta x\, dx$).

Exercice .5 Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels, non nuls, et soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{R}^{n+1}$ distinct de $(0, 0, \ldots, 0)$. Par récurrence sur n, montrer que, dans l'ensemble $\mathbb{R}_*^+$, la fonction $x \mapsto \lambda_0 + \lambda_1 x^{\alpha_1} + \cdots + \lambda_n x^{\alpha_n}$ ne s'annule qu'en un nombre fini de points.

Soit alors un ensemble A et f une application de A dans $\mathbb{R}_*^+$, telle que $f(A)$ soit une partie infinie de $\mathbb{R}_*^+$. Montrer que la famille $\{f^\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des applications de A dans $\mathbb{R}$.

Exercice .6 Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et $x_0 \in E\backslash\{0\}$. On suppose que $\{f^k(x_0)\}_{k=1,2,\ldots,n}$ forme une base de E. Montrer que f est bijective et qu'il existe $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $f^n + a_n f^{n-1} + \cdots + a_1 I = 0$.

Exercice .7 Soit E un K-espace vectoriel et p un projecteur de E. Montrer qu'un endomorphisme u de E commute avec p si et seulement si Ker (p) et Im (p) sont stables par u.

Exercice .8 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E.

1°. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $p+q$ soit un projecteur est que $p \circ q + q \circ p = 0$ ce qui est encore équivalent à $p \circ q = q \circ p = 0$.

2°. L'endomorphisme $p+q$ étant un projecteur, montrer que

$$\text{Im } (p+q) = \text{Im } (p) \oplus \text{Im } (q)$$

Déterminer Ker $(p+q)$.

Exercice .9 Soient u un endomorphisme de $\mathbb{C}^m$ tel que $u^n = I_{\mathbb{C}^m}$, E un sous-espace de $\mathbb{C}^m$ stable par u, p une projection de $\mathbb{C}^m$ sur E. On pose

$$q = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{n-k}.$$

Montrer que q est un projecteur et que Ker (q) est supplémentaire de E stable par u.

Exercice .10 Soient E et F des K-espaces vectoriels de dimension finie, V (resp. W) un sous espace de E (resp. F). On considère l'espace

$$\mathcal{L}_{V,W}(E,F) = \{u \in \mathcal{L}(E,F) \mid V \subset \text{ Ker } u, \text{ et } \quad \text{Im } u \subset W\}$$

Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace de $\mathcal{L}(E,F)$ et calculer sa dimension.

Exercice .11 Soient E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Montrer que l'ensemble des endomorphismes v de E tels que $u \circ v = v \circ u = 0$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $(\dim \text{ Ker } u)^2$.

Exercice .12 Soit f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E ; montrer les equivalences:

$$\begin{array}{lcl} \text{Ker } f \cap \text{ Im } f = \{0\} & \iff & \text{Ker } f^2 = \text{ Ker } f \\ f^2(E) = f(E) & \iff & E = \text{ Ker } f + \text{ Im } f. \end{array}$$

EXERCICE .13 Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels de dimension finie, f une application linéaire de E dans F, g une application linéaire de F dans G. Montrer que

$$\text{rg } f + \text{ rg } g - \dim F \leq \text{ rg } (g \circ f) \leq \inf(\text{ rg } f, \text{ rg } g).$$

D'une manière analogue si f et g sont deux applications linéaires de E dans F alors

$$| \text{ rg } f - \text{ rg } f| \leq \text{ rg } (f+g) \leq \text{ rg } f + \text{ rg } g.$$

EXERCICE .14 Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $n = \dim E, N = \text{Ker } u$. Etablir:

1°. Pour tout sous-espace G de E: $\dim u(G) = \dim G - \dim(N \cap G)$.

2°. Pour tout sous-espace H de F: $\dim u^{-1}(H) = n + \dim(H \cap u(E)) - \text{ rg } u$.

EXERCICE .15 *Suites exactes* – Soient $E_0, \ldots, E_n$, des K-espaces vectoriels. On dit que le diagramme:

$$E_0 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} E_{n-1} \xrightarrow{f_n} E_n \tag{1}$$

est une suite exacte si: $\text{Im } f_k = \text{Ker } f_{k+1}$, $(1 \leq k \leq n-1)$.

1°. Etant donnés la suite exacte (1) et l'espace vectoriel trivial $O = \{0\}$, à quelle condition peut-on prolonger (1) en une suite exacte:

$$O \xrightarrow{f_0} E_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} E_{n-1} \xrightarrow{f_n} E_n \xrightarrow{f_{n+1}} O.$$

En supposant que cette condition est réalisée et que les E_k sont de dimension finie, vérifier:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim E_k = 0.$$

2°. Soient E' et E'' deux sous-espaces d'un K-espace vectoriel E. Exhiber une suite exacte:

$$O \longrightarrow E' \cap E'' \xrightarrow{f} E' \times E'' \xrightarrow{g} E' + E'' \longrightarrow O.$$

En déduire que, si E' et E'' sont de dimension finie:

$$\dim(E' \cap E'') + \dim(E' + E'') = \dim(E') + \dim(E'').$$

Exercice .16 Soient E un espace vectoriel, $a \in E \backslash \{0\}$. Trouver les $f \in \mathcal{L}(E)$, tels que le système $\{a, x, f(x)\}$ soit lié.

Exercice .17 Dans un espace vectoriel de dimension finie n, on considère deux sous-espaces A et B de même dimension r. Montrer qu'il existe un sous-espace C de E tel que $A \oplus C = B \oplus C = E$.(On pourra raisonner par récurrence sur r).

Exercice .18 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On appelle *drapeau* de E toute famille de sous-espaces de E qui est de la forme $\{E_i\}_{0 \leq i \leq n}$ et vérifie:

i. $E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_n$.

ii. $\dim E_i = i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Soient $\{E_i\}_{0 \leq i \leq n}$ et $\{E'_i\}_{0 \leq i \leq n}$ deux drapeaux de E.

1°. *a*. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$; on lui associe:

$$j = \sigma(i) = \inf \{k \in \{1, \ldots, n\} \mid E'_i + E_k = E'_{i-1} + E_k\}.$$

Vérifier que j existe et appartient à $\{1, \ldots, n\}$.

Vérifier que $E'_i \setminus E'_{i-1}$ et $E_j \setminus E_{j-1}$ ont un élément commun.

b. Montrer que l'application σ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$.

2°. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $(e_1, \ldots, e_i)$ soit une base de E_i et $(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(i)})$ une base de E'_i.

Exercice .19 On considère le système de quatre vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 de $\mathbb{R}^5$ défini par

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ -10 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

1°. Déterminer le rang du système $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ et trouver les relations liant ces vecteurs s'ils ne sont pas linéairement indépendants.

2°. Soit l'application linéaire $\Phi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ définie par

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4$$

Quelle est la dimension de Ker Φ ?

Matrices

Exercice .1

1°. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^*$ qui associe à chaque matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la forme linéaire $T_M(X) = tr(MX)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que T est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2°. Soit $\varphi \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^*$ telle que $\varphi(MN) = \varphi(NM)$ pour toutes les matrices M, N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note M_0 la matrice telle que $\varphi = T_{M_0}$. Démontrer que

$$\forall\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad M_0M = MM_0.$$

En déduire que $\varphi = \lambda tr$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

3°. Trouver la dimension de vect $\{MN - NM \mid M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$.

Exercice .2 Soient α, β deux réels distincts, et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M^2 - (\alpha + \beta)M + \alpha\beta I_n = 0, \qquad M \neq \alpha I_n, \quad M \neq \beta I_n.$$

1°. Montrer que l'espace vectoriel $V(M)$ engendré par M et I_n est de dimension 2.

2°. Trouver les matrices $N \in V(M)$ telles que $N \neq 0$, $N \neq I_n$ et $N^2 = N$. On en trouvera deux notées A et B. Verifier que $AB = BA = 0$, et montrer que A et B forment une base de $V(M)$. Montrer que $V(M)$ est une $\mathbb{R}$-sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que si $C \in V(M)$ est inversible alors $C^{-1} \in V(M)$.

Exercice .3 Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice carrée à coefficients dans un anneau commutatif. Montrer que $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0$.

Exercice .4 Soient $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de la forme $xA + yB$ où $x, y \in \mathbb{R}$.

1°. Calculer $(A + B)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

2°. Montrer que la matrice $xA + yB$ n'est pas inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3°. Montrer que l'addition et la multiplication des matrices font de $\mathcal{E}$ un corps, préciser l'élément unité et donner l'expression de l'inverse de $\mathcal{E}$ de la matrice $xA + yB$.

4°. Montrer que $\mathcal{E}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Exercice .5 On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^p$, $p \geq 2$ muni d'une base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_p\}$.

Soit u l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $x \in E$ de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ sur la base $\mathcal{B}$ associe le vecteur $y \in E$ de coordonnées $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ telles que:

$$\forall\ i \in \{1, 2, \ldots, p\}, \qquad y_i = \frac{1}{p-1} \sum_{j \in \{1,2,\ldots,p\} \setminus \{i\}} x_j$$

1°. Déterminer la matrice $A = Mat(u, \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

2°. Notons I, J respectivement la matrice identité d'ordre p, et la matrice carrée d'ordre p dont tous les coefficients valent 1.

a. Calculer J^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Montrer qu'il existe a_n et b_n (que l'on déterminera), tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $A^n = a_n A + b_n I$.

c. Montrer que A est inversible, determiner A^{-1}.

d. Montrer qu'il existe λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}$ tels que $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = 0$.

3°. Soit $C = \dfrac{p-1}{p} A + \dfrac{1}{p} I$. Montrer que C est la matrice d'une projection q dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer son image E_1 et son noyau E_2. Trouver une base $\mathcal{E}_1$ de E_1 et une base $\mathcal{E}_2$ de E_2. Ecrire la matrice $\widetilde{A} = Mat(u, \mathcal{E}, \mathcal{E})$ où $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$. Trouver une matrice inversible Q telle que $A = Q\widetilde{A}Q^{-1}$.

Exercice .6 Soient $e = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$; et $\sigma \in \mathcal{S}_n$ une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. On considère l'endomprphisme p_σ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui au vecteur $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ associe le vecteur $\begin{bmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{bmatrix}$.

1°. Exprimer en utilisant le symbole de Kronicker la matrice P^σ de p_σ dans la base e.

2°. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $P^\sigma M$, MP^σ, $P^\sigma M (P^\sigma)^{-1}$.

3°. Montrer que les matrices A, B suivantes sont semblables

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE .7 Soient X, Y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On suppose que

$$ {}^tX = [x_1, x_2, \ldots, x_n], \qquad {}^tY = [y_1, y_2, \ldots, y_n] $$

avec $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \theta.$

On pose $M = aX\,{}^tX + bY\,{}^tY$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe λ, μ tels que

$$ M^3 + \lambda M^2 + \mu M = 0. $$

Application: Etudier le cas de la matrice M dont le coefficient a_{ij} est égale à α si $i+j$ est pair et à β si $i+j$ est impair.

EXERCICE .8 Soient P le polynôme défini par $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 1$, A la matrice

$$ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} $$

1°. Déterminer la valeur de $P(A)$; polynôme de la matrice A.

2°. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet 3 racines réelles $r_1 < r_2 < r_3$. On donnera les valeurs des parties entières respectives e_1,e_2,e_3.

3°. On introduit la division euclidienne de X^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ par $P(X)$, soit

$$ X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X). $$

Montrer que l'on a $R_n(X) = (r_1)^n V_1(X) + (r_2)^n V_2(X) + (r_3)^n V_3(X)$, où les V_j, $j = 1, 2, 3$, sont des polynômes de degré 2.

Exprimer A^n à l'aide de ces polynômes.

4°. soit z_1, z_2, z_3 des racines carrées complexes de r_1, r_2, r_3. Dans l'expression de R_n trouvée dans la question précédente, on remplace $(r_1)^n, (r_2)^n, (r_3)^n$ par z_1, z_2, z_3. on obtient ainsi un polynôme $S(X)$ de degré 2. Calculer $(S(r_1))^2$, $(S(r_2))^2$, $(S(r_1))^2$.

5°. Montrer que ce calcul permet de déterminer des matrices B, à coefficients complexes éventuellemet, telles que $B^2 = A$. Combien en trouve-t-on au plus ?

Exercice .9 Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $M_a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M = (m_{ij})$ avec

$$m_{ij} = \begin{cases} C_{j-1}^{i-1}\, a^{j-i} & \text{si} \quad j \geq i \\ \\ 0 & \text{si} \quad j < i \end{cases}$$

1°. Montrer que l'ensemble $G = \{M_a \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R}\}$ est un sous groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, qui est isomorphe à $\mathbb{R}$.

2°. Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $a_{ij} = 0$ si $i \geq j$, et $b_{ij} = 0$ si $i \geq j - s$ où $(s \in \{0, 1, \ldots, n-1\})$; on note $C = AB = (c_{ij})$. Montrer que $c_{ij} = 0$ si $i \geq j - (s+1)$. En déduire que $(M_a - I)^n = 0$.

3°. Montrer que, pour tout polynôme de degré strictement inférieur à n, on a

$$P(X) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k P(X + ka)$$

4°. Soient $0 < p \leq n$ des entiers naturels. On note $S_{n,p}$ le nombre des surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments. Montrer que

$$p^n = \sum_{k=1}^{n} C_p^k S_{n,k}.$$

(On pourrait évaluer de deux manières le nombre d'applications de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans $\{1, 2, \ldots, p\}$).

En déduire $S_{n,p}$. Calculer en particulier $S_{n+1,n}$, et $S_{n+2,n}$.

Exercice .10 Si m est un entier non nul, on note $\mathbb{C}_m[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré *strictement inférieure* à m. Dans tout le problème on fixe deux entiers m, n.

1°. Pour $1 \leq k \leq n + m$, on définit l'élément e_k de $\mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_m[X]$ par

$$e_k = \begin{cases} (X^{n-k}, 0) & \text{si} \quad 1 \leq k \leq n \\ \\ (0, X^{n+m-k}) & \text{si} \quad n < k \leq n + m \end{cases}$$

Montrer que $\mathcal{E} = \{e_k\}_{1 \leq k \leq n+m}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_m[X]$.

2°. Soient $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ avec $a_m \neq 0$, et $Q(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ avec $b_n \neq 0$. Considérons l'application Φ qui à tout couple $(S(X), T(X))$ de $\mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_m[X]$ associe le polynôme $S(X).P(X) + T(X).Q(x)$.

a. Montrer que Φ est une application linéaire de $\mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_m[X]$ dans $\mathbb{C}_{n+m}[X]$.

b. Soit $\Delta(X)$ le PGCD de $P(X)$ et $Q(X)$, et soit d le degré de $\Delta(X)$. Alors $P(X) = \Delta(X)P_1(X)$, et $Q(X) = \Delta(X)Q_1(X)$.

– Montrer que $P_1(X)$ et $Q_1(X)$ sont premiers entre eux.

– Montrer ensuite que

$$\operatorname{Ker}\Phi = \big\{(-\lambda(X)Q_1(X), \lambda(X)P_1(X)); \text{avec} \quad \lambda(X) \in \mathbb{C}_d[X]\big\}.$$

– Quelle est la dimension de Ker Φ ?

c. Soit $\mathcal{F} = (X^{n+m-1}, X^{n+m-2}, \dots, X, 1)$ la base canonique de $\mathbb{C}_{n+m}[X]$ (dans l'ordre décroissante des degrés). Ecrire la matrice $M = Mat(\Phi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ de Φ dans les bases $\mathcal{E}$,$\mathcal{F}$.

d. Déduire de ce qui précède que le *rang* de la matrice $M(P(X), Q(X))$ de $\mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C})$ définie par

$$M((P(X),Q(X)) = \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{n}\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{m} \\ \begin{bmatrix} a_m & 0 & \dots & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{m-1} & a_m & \ddots & & \vdots & b_{n-1} & b_n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_1 & & & & a_m & b_1 & & & & b_n \\ a_0 & a_1 & & & a_{m-1} & b_0 & b_1 & & & b_{n-1} \\ 0 & a_0 & \ddots & & & 0 & b_0 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & a_0 & a_1 & \vdots & & & b_0 & b_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 & b_0 \end{bmatrix} \end{array}$$

est égale au degré du PPCM$(P(X), Q(X))$.

3°. On conserve les notations de 2°. On appelle le *résultant* de $P(X)$ et de $Q(X)$ le nombre $R(P,Q) = \det M((P(X), Q(X))$. Montrer que P et Q sont premiers entre eux si, et seulement si, $R(P,Q) \neq 0$.

4°. On appelle *discriminant* d'un polynôme P le nombre $D(P) = R(P, P')$.

a. Calculer $D(P)$ où $P(X) = X^3 + pX + q$.

b. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les polynômes $aX^2 + bX + c$ et $a'X^2 + b'X + c'$ aient au moins une racine commune est que $(ac' - ca')^2 = (ab' - ba')(bc' - cb')$.

5°. On conserve toujours les notations de 2°. Pour un polynôme $U(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ et pour $a \in \mathbb{C}$, on note $\tau_a(U)(X) = U(X + a)$. Considérons les quatre applications linéaires suivantes:

$$\Psi \ : \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_m[X] \longrightarrow \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_m[X] : (S, T) \mapsto (\tau_{-a}(S), \tau_{-a}(T))$$

$$\Phi_1 : \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_m[X] \longrightarrow \mathbb{C}_{n+m}[X] : (S, T) \mapsto S.\tau_{-a}(P) + T.Q$$

$$\Theta \ : \mathbb{C}_{n+m}[X] \longrightarrow \mathbb{C}_{n+m}[X] : U \mapsto \tau_a(U)$$

$$\Phi_2 : \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_m[X] \longrightarrow \mathbb{C}_{n+m}[X] : (S, T) \mapsto S.P + T.\tau_{-a}(Q)$$

a. Montrer que $\Phi_2 = \Theta \circ \Phi_1 \circ \Psi$. En déduire que $R(P, \tau_a(Q)) = R(\tau_{-a}(P), Q)$.

b. Calculer $R(P, X)$; et montrer que $R(P, X.Q) = (-1)^m P(0) R(P, Q)$.

c. Utiliser *a.* pour montrer que $R(P, (X - a)Q) = (-1)^m P(a) R(P, Q)$.

d. Montrer que

$$R(P, \prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)) = (-1)^{mn} \prod_{k=1}^{n} P(\alpha_k)$$

$$R(\prod_{j=1}^{m}(X - \beta_j), \prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)) = (-1)^{mn} \prod_{k,j}(\alpha_k - \beta_j)$$

Systèmes linéaires et déterminants

Exercice .1 Etudier, suivant les valeurs des paramétres, les systèms linéaires:

$$\begin{cases} x + y + z = m+1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + my + z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(a+1)x + 3y + az = a+4 \\ 4(a-1)x + (a+1)y + (2a-1)z = 2a+2 \\ (5a-4)x + (a+1)y + (3a-4)z = a-1 \end{cases}$$

Exercice .2 Etudier suivant les valeurs de $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ le système linéaire

$$\begin{array}{ccccccccc} \lambda x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & + & t & = & \mu \\ x & + & y & + & \lambda z & + & t & = & \mu^2 \\ x & + & y & + & z & + & \lambda t & = & \mu^3 \end{array}$$

Exercice .3 Déterminer les inverses des matrices suivantes

$$\begin{bmatrix} 10 & 9 & 1 \\ 9 & 10 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 5 & 15 & 23 \\ 6 & 15 & 46 & 73 \\ 8 & 23 & 73 & 130 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 5 \\ 2 & -7 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 20 & 21 & 22 & 23 \\ 190 & 210 & 231 & 253 \\ 1140 & 1330 & 1540 & 1771 \end{bmatrix}$$

Exercice .4 Étudier le système linéaire

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & \cdots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & \ldots & + & nx_n & = & 0 \\ x_1 & + & 2^2x_2 & + & \ldots & + & n^2x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ x_1 & + & 2^{n-1}x_2 & + & \cdots & + & n^{n-1}x_n & = & 0 \end{array}$$

Exercice .5 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la matrice suivante est inversible

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{n!} \\ \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n+1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n+1)!} & \cdots & \frac{1}{(2n)!} \end{bmatrix}$$

Exercice .6

1°. Soient X, Y deux matrices de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. On pose $\gamma = {}^tY.X$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur γ pour que la matrice $I + X\,{}^tY$ soit inversible, et calculer son inverse dans ce cas.

2°. Soit M une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $N = M + X\,{}^tY$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le nombre ${}^tYM^{-1}X$ pour que N soit inversible, et calculer N^{-1} dans ce cas.

3°. On pose

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} 2.01 & 3 & 5.99 & 1.98 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Déterminer M^{-1}. En déduire N^{-1}. Dire comment faut-il modifier l'élément $a_{24} = 1$ de M pour qu'elle devienne non-inversible.

Exercice .7 Soit A la matrice d'ordre 4 suivante

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 6 & 1 & 7 \\ 2 & 16 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 8 & 22 \end{bmatrix}$$

1°. Trouver une matrice triangulaire supérieure U, et une matrice triangulaire inférieure L dont tous les éléments diagonaux sonts égaux à 1, telles que $A = L.U$

2°. Calculer les inverses de L et de U en déduire A^{-1}.

Exercice .8 Calculer les déterminants des matrices suivantes

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Exercice .9 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = a$ si $i > j$,$a_{ij} = b$ si $i < j$, et $a_{ii} = x_i$. En supposant que $a \neq b$ calculer $\det A$. Etudier le cas $a = b$.(On pourrait introduire la fonction $f(t) = (x_1 - t)(x_2 - t)\cdots(x_n - t)$).

Exercice .10 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = |i - j|$. Calculer $\det A$.

Exercice .11 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = S_{i\wedge j}$, où $i \wedge j$ est le plus petit des nombres i et j, et $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont des nombres réels. Calculer $\det A$.

Application : $S_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

Exercice .12 Soit M une matrice carrée d'ordre n sur un corps $\mathbb{K}$. Supposons que A s'écrit sous la forme

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$, et $C \in \mathcal{M}_{q\times p}(\mathbb{K})$.$(p + q = n)$.

1°. Démontrer que si A est inversible alors, $\det M = \det A \cdot \det(D - C \cdot A^{-1} \cdot B)$.

2°. Démontrer que si D est inversible alors, $\det M = \det D \cdot \det(A - B \cdot D^{-1} \cdot C)$.

3°. Soit $1 \leq p \leq n$ deux nombres entiers. Soient $A \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, et $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}$ on a,

$$\det(xI_n + AB) = x^{n-p} \det(xI_p + BA)$$

Exercice .13 soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des nombres complexes tels que $\forall\ i, j \quad a_i + b_j \neq 0$. On appelle Matrice de Cauchy associée à $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n)$, la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $c_{ij} = \dfrac{1}{a_i + b_j}$. Calculer $\det C$.

Application: Étudier le cas de la matrice de Hilbert $a_i = b_i = i - 1/2$.

Exercice .14 On considère pour $b > 0$ et $a \in \mathbb{R}^*$ la matrice $A_n(a, b)$ d'ordre n définie par $A_n(a, b) = (a_{ij})$ avec $a_{ii} = 2b$, pour $1 \leq i \leq n$; $a_{ij} = a$, si $|i - j| = 1$ et $a_{ij} = 0$ dans les autres cas.

1°. On pose $\Delta_n = \Delta_n(a, b) = \det A_n(a, b)$.

a. Montrer que si $b = |a|$ alors $\Delta_n = (n + 1)b^n$.

b. Montrer que si $b \neq |a|$ alors

$$\Delta_n = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - a^2}} \left((b + \sqrt{b^2 - a^2})^{n+1} - (b - \sqrt{b^2 - a^2})^{n+1} \right).$$

déduire que si $|a| < b$ alors pour tout $n > 1$, $\Delta_n > 0$.

c. Montrer que $\Delta_n = 0$ si, et seulement si,

$$\frac{b}{a} = \left\{ \cos \frac{\pi k}{n+1} \mid k = 1, \ldots, n \right\}.$$

On suppose désormais que $|a| \leq b$.

2°. *a*. Montrer qu'il existe des reels $\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}$; $\mu_1, \ldots, \mu_n$ tels que si

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \nu_1 & 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \nu_2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \nu_{n-1} & 1 \end{bmatrix} ; \quad U = \begin{bmatrix} \mu_1 & a & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & a & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & \mu_{n-1} & a \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \mu_n \end{bmatrix}$$

alors $L.U = A_n(a, b)$. Exprimer les (μ_i) et les (ν_i) en fonction de a et de la suite (Δ_i).

b. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D qu'on déterminera telle que $A_n(a,b) = L.D.^tL$.

3°. Soit $M = (C_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n, telle que $C_{ij} = \delta_{i,j+1}.\dfrac{m_j}{m_{j+1}}$ où $m_1, \ldots, m_n$ sont des réels non nuls et $\delta_{i,k}$ est le symbole de Kronicker qui vaut 1 si $i = k$ et 0 si $i \neq k$. Montrer que l'élément de la ligne i et de la colonne j de M^k est $\delta_{i,j+k}.\dfrac{m_j}{m_{j+k}}$. En déduire l'inverse de $I + aM$ pour $a \neq 0$.

4°. Utiliser 3°. pour Calculer L^{-1}.

5°. En déduire que $A^{-1} = (\rho_{ij})$ avec

$$\rho_{ij} = \frac{\Delta_{i-1}\Delta_{j-1}}{(-a)^{i+j}} \sum_{k=i\vee j}^{n} \frac{(a)^{2k}}{\Delta_k \Delta_{k-1}} \qquad \text{où } i \vee j = \max(i,j)$$

6°. Montrer que $\forall\ i \geq 1$,

$$\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i} - \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} = -\frac{(a)^{2i}}{\Delta_i \Delta_{i-1}}$$

7°. On pose $i \vee j = \max(i,j)$, $i \wedge j = \min(i,j)$. Montrer finalement que

$$\rho_{ij} = (-a)^{|i-j|} \frac{\Delta_{i\wedge j-1}.\Delta_{n-i\vee j}}{\Delta_n}$$

8°. Calculer explicitement $(M_n(-1,1))^{-1}$.

EXERCICE .15 On considère la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 6 & 10 \\ 4 & -4 & 10 & 29 \end{bmatrix}$$

1°. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux positifs S telle que $A = S.^tS$.

2°. Montrer que S est inversible et calculer S^{-1}.

item3°. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice .16 Soit n un entier positif supérieur au égale à 2. On note $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$ et on considère la matrice $A = (\Omega_{ij})$ d'ordre n définie par $\Omega_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$.

1°. Calculer A^{-1}.

2°. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ On note $C(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ la matrice d'ordre n suivante

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_0 \\ a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_0 & a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-2} \end{bmatrix}$$

Calculer $A.C(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}).\overline{A}$. En déduire $\det C(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$.

Espaces euclidiens

Exercice .1 Soient $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ des vecteurs de E vérifant

1°. $\forall\, i, \quad \|e_i\| = 1$;

2°. $\forall\, x \in E, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2$.

Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice .2 Soient $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ des vecteurs de E.

1°. Montrer que

$$\sum_{i<j} \|x_i - x_j\|^2 = n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 .$$

2°. On suppose que pour tout i, $\|xi\| \leq R$, et que pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$, $\|x_i - x_j\| \geq 2$. Montrer que $R \geq \sqrt{2(n-1)/n}$.

Exercice .3 Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace préhilbertien. Pour $r \in \mathbb{R}_+$, on note $B(0, r) = \{x \in E \mid \|x\| \leq r\}$, et pour x, et y de E, on note $[x, y] = \{x + \lambda(y - x) \in E \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$. Montrer que

$$[x, y] \subset B(0, a+b) \setminus B(0, a) \Longrightarrow \|x - y\| \leq 2\sqrt{b^2 + 2ba}.$$

Exercice .4 E désigne $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Déterminer la projection orthogonale de E sur le sous-espace F défini par

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \sum_{i=1}^{4} x_i = x_1 + x_3 - x_2 - x_4 = 0 \right\}.$$

Exercice .5 E désigne $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Déterminer la symétrie orthogonale de E par rapport au sous-espace F défini par

$$F = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \sum_{i=1}^{4} x_i = \sum_{i=1}^{4} i x_i = 0 \right\}.$$

Exercice .6 Déterminer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 x^2\left|\operatorname{Log} x - ax - b\right|^2\, dx.$$

Exercice .7 Soient $(E,\langle .,.\rangle_E)$, $(H,\langle .,.\rangle_H)$ deux espaces préhilbertiens, et $f : E \longrightarrow H$ une application telle que

1°. $f(0) = 0$.

2°. $\forall\,(x,y)\in E\times E,\quad \|f(x)-f(y)\|_H = \|x-y\|_E$.

Montrer que f est linéaire. (On pourrait considérer le milieu de $[x,y]$.)

Exercice .8 Soit $(E,\langle .,.\rangle)$ un espace préhilbertien. On pose, pour $(x,y)\in E\times E$,

$$d(x,y) = \frac{\|x-y\|}{\sqrt{1+\|x\|^2}\sqrt{1+\|y\|^2}}$$

On se propose de démontrer que $\forall\,(x,y,z)\in E\times E\times E,\qquad d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$.

1°. Montrer que si $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, et si $(u,v)\in E\times E$, tels que $\|u\|=\|v\|=1$, alors $\|\lambda u-\mu v\| = \|\lambda v-\mu u\|$.

2°. Montrer que pour tout $(x,y)\in E\times E$

$$\left\|\frac{y}{\|y\|^2}-\frac{x}{\|x\|^2}\right\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\|\|y\|}.$$

3°. On considère $\widetilde{E} = E\times\mathbb{R}$ muni du produit scalaire $\langle (x,\alpha),(y,\beta)\rangle = \langle x,y\rangle + \alpha\beta$, et $f : E\longrightarrow \widetilde{E} : x\mapsto (x,1)$. Exprimer $d(x,y)$ en fonction de $f(x)$ et $f(y)$. Conclure.

Exercice .9 Soit $(E,\langle .,.\rangle)$ un espace préhilbertien. p une projection de E.($i.e.$ $p^2=p$). Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

1°. p est orthogonale.

2°. $p^* = p$.

3°. $\operatorname{Ker} p \subset (\operatorname{Im} p)^\perp$.

4°. $\forall\, x\in E,\quad \|p(x)\|\le\|x\|$.

Exercice .10 Soit A une matrice symétrique définie positive d'ordre n. Montrer

$$\forall\,(X,Y)\in\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}),\qquad ({}^tXY)^2 \le ({}^tXAX)({}^tYA^{-1}Y)$$

EXERCICE .11 Soit A une matrice symétrique positive d'ordre n. Montrer que

$$\sup_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}| = \sup_{1\leq i\leq n} a_{ii}.$$

EXERCICE .12 Soient S_1, S_2 deux matrices symétriques. Montrer que

$$S_1S_2 \text{ est symétrique } \iff S_1S_2 = S_2S_1.$$

EXERCICE .13 Soient $S_1, S_2, \dots S_n$ des matrices symétriques positives. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = 0 \iff S_1 = S_2 = \dots = S_n = 0.$$

EXERCICE .14 Soient $S_1, S_2, \dots S_m$ des matrices symétriques. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{m} S_k = \sum_{k=1}^{m} S_k^2 = mI_n \iff S_1 = S_2 = \dots = S_m = I_n.$$

EXERCICE .15 Montrer qu'il n'existe pas de matrices symétriques définies positives A, B, C telles que $A + B = C$ et $A^{-1} + B^{-1} = C^{-1}$.

EXERCICE .16 Soit $O = (a_{ij})$ une matrice orthogonale. Montrer que

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}, \qquad \left|\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\right| \leq n.$$

EXERCICE .17 Montrer que la matrice A d'ordre n définie par $a_{ij} = \min(i, j)$ est symétrique définie positive.

EXERCICE .18 Montrer que la matrice symétrique A d'ordre n définie par $a_{ij} = i(n+1-j)$ pour $i \leq j$ est symétrique définie positive.

EXERCICE .19 Soient $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace euclidien, P une projection orthogonale de E et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \|P(e_k)\|^2 = \operatorname{rg}(P).$$

Exercice .20 Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien, $T \in \mathcal{L}(E)$ Montrer que

1°. $(\operatorname{Im} T)^{\perp} = \operatorname{Ker} T^*$.

2°. $(\operatorname{Ker} T)^{\perp} = \operatorname{Im} T^*$.

Exercice .21 E (resp. E_n) désigne l'espace de polynômes réels (resp. de degré inférieur où égal à n). On munit E (resp. E_n) du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x).Q(x)e^{-x^2}\,dx.$$

I

Soit $\mu : E \longrightarrow E : P \mapsto P'' - 2XP'$.

1°. Montrer que $\mu = \mu^*$, et que $\mu(E_n) \subset E_n$.
On note alors $\mu_n : E_n \longrightarrow E_n : P \mapsto P'' - 2XP'$.

2°. En écrivant la matrice de $\mu_n + 2nI_n$ dans la base canonique de E_n, montrer que $\operatorname{Ker}(\mu_n + 2nI_n) = \{\lambda P_n : \lambda \in \mathbb{R}\}$ où P_n est un polynôme unitaire de degré n.

3°. Montrer que $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthogonale de E.

II

On pose $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$.

1°. Montrer que, pour tout n, $H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$.

2°. Montrer que, pour tout n, H_n est un polynôme de degré n.(H_n est dit le n-ième polynôme de Hermite).

3°. Montrer que, pour tout $Q \in E$, $\langle Q, H_n \rangle = \langle Q^{(n)}, 1 \rangle$.(On pourrait effectuer des intégrations par parties successives).

4°. Montrer que H_n est un système orthogonale de E ; Trouver $\|H_n\|$.

5°. Montrer que, pour tout n, il existe $\alpha_n \neq 0$, tel que $H_n = \alpha_n P_n$. En déduire que $H_n'' - 2XH_n' + 2nH_n = 0$.

**Institut Supérieur des Sciences Appliquées
et de Technologie**

**Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année**

Exercice .1 Étudier les assertions suivantes, et préciser celles qui sont vraies et celles qui sont fausses en justifiant à chaque fois votre réponse.

1°. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels.

a. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et si $(u_{n+1}-u_n)$ converge vers 0, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

b. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et si $u_{n+1}-u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

c. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée et si $(u_{n+1}-u_n)$ est monotone, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

d. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée et si $(u_{n+1}-u_n)$ converge vers 0, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

2°. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite *croissante* de nombres réels.

a. Si $(u_{2n}-u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

b. Si $u_{2n}-u_n \leq \dfrac{1}{n}$, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

Exercice .2 Pour $x \in \mathbb{R}_*^+$, on pose

$$f(x) = (x+\frac{1}{2})\mathrm{Log}\,(1+\frac{1}{x}) - 1.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = (n+\frac{1}{2})\mathrm{Log}\, n - n - \mathrm{Log}\,(n!).$$

1°. Montrer que, pour tout $t \in [0,1[$, l'on a

$$2t + \frac{2}{3}t^3 \leq \mathrm{Log}\,\frac{1+t}{1-t} \leq 2t + \frac{2}{3}\frac{t^3}{1-t^2}.$$

2°. Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'on a

$$\frac{1}{3(2x+1)^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{12x(x+1)}.$$

(On pourrait utiliser 1°. avec un t convenablement choisi.)

3°. En déduire que, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+3}\right) \leq f(x) \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right).$$

4°. Montrer que

$$S_m - S_n = \sum_{k=n}^{m-1} f(k) \qquad \text{pour} \quad (m > n \geq 1).$$

5°. En déduire que, pour $m > n \geq 1$

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2m+1}\right) \leq S_m - S_n \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right).$$

6°. Conclure qu'il existe une constante β telle que,

$$\frac{1}{6(2n+1)} \leq \beta - S_n \leq \frac{1}{12n} \qquad \text{pour} \quad (n > 0).$$

Et calculer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}n^n e^{-n}}$$

en fonction de β. (On verra plus tard que cette limite vaut $\sqrt{2\pi}$).

Institut Supérieur des Sciences Appliquées
et de Technologie

Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année

Si $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ désigne la partie entière de x. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\Delta(x) = \left| x - E(x - \frac{1}{2}) - 1 \right|.$$

1°. Montrer que Δ définit une fonction périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de période 1.

2°. Calculer $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1/2} \Delta(x)$, et $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1/2} \Delta(x)$. Que peut-on en déduire ?

3°. Exprimer simplement $\Delta(x)$ pour $x \in [0,1]$,(on distinguera les cas $x \in [0,1/2]$ et $x \in [1/2,1]$). Tracer le graphe de Δ.

4°. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} 2^{-k}\Delta(2^k x)$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\{f_n(x)\}_n$ converge vers une limite que l'on note dans la suite $f(x)$.

5°. Montrer que la fonction f est bornée, périodique de période 1, et vérifie

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \frac{1}{2}f(2x) = \Delta(x).$$

6°. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction bornée telle que, $\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad h(x) - \frac{1}{2}h(2x) = \Delta(x)$. Montrer que $\forall\ m \geq 1, \forall\ x \in \mathbb{R}, \qquad f_m(x) = h(x) - \dfrac{h(2^m x)}{2^m}$. En déduire que $f = h$.

7°. Soit $\delta(x) = \Delta(x) + \frac{1}{2}\Delta(2x)$. Tracer le graphe de δ.

8°. Montrer que $\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad f_{2m}(x) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} 2^{-2k}\delta(2^{2k}x)$. En déduire que $\sup\limits_{\mathbb{R}} f(x) \leq 2/3$.

9°. Montrer que $f_{2m}(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}(1 - 4^{-m})$, (On pourra commencer par calculer le reste de la division de 2^{2k} par 3). En déduire la valeur de $\sup\limits_{\mathbb{R}} f(x)$.

10°. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Omran Kouba

Institut Supérieur des Sciences Appliquées
et de Technologie

Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année

Dans tout le problème $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ différent de $\{0\}$. On note $b=\inf(G\cap\mathbb{R}_*^+)$.

1°. Montrer que si $b>0$ alors $G=\{\,bk \mid k\in\mathbb{Z}\,\}$.

2°. On suppose que $b=0$. Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ avec $x<y$.

a. Montrer qu'il existe $g\in G$ tel que $0<g<(y-x)/2$.

b. On pose $k=E\left(\dfrac{y}{g}\right)-1$. Montrer que $kg\in]\,x,y\,[\cap G$.

c. En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.

3°. Soit $\theta\in\mathbb{R}_*^+$ on note $\mathcal{Z}[\theta]$ l'ensemble $\left\{n+m\theta \mid (n,m)\in\mathbb{Z}^2\,\right\}$.

a. Montrer que $\mathcal{Z}[\theta]$ est un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$.

b. Montrer que $\mathcal{Z}[\theta]$ est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\theta\notin\mathbb{Q}$

4°. On suppose dans cette question que $\theta\in\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{Q}$ et on note $\mathcal{N}[\theta]$ l'ensemble $\{n+m\theta \mid (n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\,\}$. Soit $\varepsilon>0$.

a. Montrer qu'il existe $\lambda_\varepsilon\in\mathcal{N}[\theta]$ tel que $0<|\lambda_\varepsilon|<\varepsilon$.

b. Montrer que si $\lambda_\varepsilon<0$, alors il existe $\mu_\varepsilon\in\mathcal{N}[\theta]$ avec $0<\mu_\varepsilon<\varepsilon$. (On pourrait considérer $k=E(\theta/|\lambda_\varepsilon|)$.

c. Montrer de même que si $\lambda_\varepsilon>0$, alors il existe $\mu_\varepsilon\in\mathcal{N}[\theta]$ avec $0>\mu_\varepsilon>-\varepsilon$.

d. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\cap\mathcal{N}[\theta]\neq\emptyset$. Que peut-on en déduire ?

5°. Soient $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continue, A une partie dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f(A)$ est une partie dense dans $f(\mathbb{R})$.

6°. Montrer en utilisant ce que précède que $\{\sin(n) \mid n\in\mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,+1]$.

Omran Kouba

Institut Supérieur des Sciences Appliquées et de Technologie

Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année

Problème I

On dit qu'une partie $A \subset \mathbb{C}$ est un *H-cercle*, si et seulement si, il existe $a, b \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}_*^+$ tels que $A = \{z : |z-a| = k\,|z-b|\}$.

1°. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre γ et de rayon ρ, et soit $a \in \mathbb{C}$ vérifiant $|a-\gamma| < \rho$. On pose $b = \gamma + \dfrac{\rho^2}{|a-\gamma|^2}(a-\gamma)$. Montrer que

$$\mathcal{C} = \{z : \ |z-a| = \frac{|a-\gamma|}{\rho}\,|z-b|\}.$$

2°. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = \lambda$, et $a \notin \mathcal{D}$. On pose $b = \dfrac{\lambda - \alpha\overline{a}}{\overline{\alpha}}$. Montrer que

$$\mathcal{D} = \{z : \ |z-a| = |z-b|\}.$$

3°. En déduire qu'une partie $A \subset \mathbb{C}$ est un *H-cercle* , si et seulement si, elle est une droite ou un cercle.

4°. Montrer que l'image d'un *H-cercle* par une similitude directe est un *H-cercle.*

Dans la suite $\widetilde{\mathbb{C}}$ désigne $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, et on suppose que ∞ appartient à toutes les droites.

5°. Soit $\mathcal{I} : \widetilde{\mathbb{C}} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{C}}$ définie par

$$\mathcal{I}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z} & \text{si} \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{si} \quad z = \infty \\ \infty & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$$

Montrer que l'image par $\mathcal{I}$ de tout *H-cercle* est aussi un *H-cercle.*

6°. Soient $a, b, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad \neq b$, et soit $\psi : \widetilde{\mathbb{C}} \longrightarrow \widetilde{\mathbb{C}}$ définie par

$$\psi(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{z+d} & \text{si} \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{-d\} \\ a & \text{si} \quad z = \infty \\ \infty & \text{si} \quad z = -d \end{cases}$$

Montrer que ψ est la composée de $\mathcal{I}$ et de quelques similitudes directes. En déduire que l'image par ψ de tout *H-cercle* est aussi un *H-cercle.*(si S est une similitude directe, on convient que $S(\infty) = \infty$).

Problème II

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 (*i.e.* $f \in C^2(\mathbb{R})$). On note, pour $k = 0$, 1 ou 2,

$$M_k(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f^{(k)}(x) \right| \in \overline{\mathbb{R}^+}.$$

On note aussi $\mathcal{E}$ l'ensemble $\{f \in C^2(\mathbb{R}) \mid M_0(f) < +\infty, \quad M_2(f) < +\infty\}$. Si $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$, on désigne par $\mathcal{E}_\alpha$ l'ensemble $\{f \in \mathcal{E} \mid [M_1(f)]^2 \leq \alpha M_0(f) M_2(f)\}$. On se propose de démontrer que $\min\{\alpha \in \mathbb{R}_*^+ \mid \mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}\} = 2$.

1°. Soient $f \in \mathcal{E}$, $a \in \mathbb{R}_*^+$, et $x \in \mathbb{R}$. En exprimant $f(x-a)$ (resp. $f(x+a)$) en fonction de $a, f(x), f'(x)$ et f''. Montrer que

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{a} M_0(f) + \frac{a}{2} M_2(f).$$

2°. Choisir a qui rend minimum la quantité $\dfrac{1}{a} M_0(f) + \dfrac{a}{2} M_2(f)$.

3°. En déduire que $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$.

4°. Pour $x \in \mathbb{R}$, On pose

$$h(x) = (-1)^{E(x)} \left((x - E(x))^3 - \frac{3}{2}(x - E(x))^2 + \frac{1}{4} \right).$$

Où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

a. Montrer que h est périodique et admet 2 pour période. Montrer que pour $t \in [0, 1]$, $h(t) = h(-t)$, en déduire que h est une fonction paire.

b. Déterminer h, h', h'' sur $[-1, 1]$, dessiner les graphes de ces fonctions et montrer que $h \in \mathcal{E}$.

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on note, dans la suite du problème,

$$g_n(t) = n\left(h(t+\frac{1}{n}) - h(t)\right).$$

h étant la fonction définie dans 4°.

5°. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $M_0(g_n) \leq 3/4$ et $M_1(g_n) \leq 3$.

6°. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(\frac{1}{2})$; $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n'(0)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} M_0(g_n)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} M_1(g_n)$.

7°. Expliciter g_n'' sur chacun des intervalles $[-1,-\frac{1}{n}[$, $[-\frac{1}{n},0[$, $[0,1-\frac{1}{n}[$ et $[1-\frac{1}{n},1[$. En déduire la valeur de $M_2(g_n)$ pour tout $n \geq 2$.

8°. Supposons que $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{E}$. En utilisant la fonction g_n. Montrer que $\alpha \geq 2$ et conclure.

Institut Supérieur des Sciences Appliquées et de Technologie

Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année

Exercice .1 On considère les deux nombres $b = 60809$ et $a = 58483$.

1°. Calculer le PGCD de a et b. On note $d =$PGCD(b, a).

2°. Trouver $s, t \in \mathbb{N}$ tels que $sb - ta = d$.

3°. Trouver $u, v \in \mathbb{N}$ tels que $ua - vb = d$.

4°. Résoudre le système $\begin{cases} x = 0 \mod b \\ x = 1 \mod a \end{cases}$

Exercice .2 Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1°. Montrer que si $m > n$ alors $2^{2^{n+1}} - 1 \mid F_m - 2$. En déduire que $F_n \mid F_m - 2$.

2°. Montrer que si $m \neq n$ alors PGCD$(F_n, F_m) = 1$.

3°. Déduire de ce qui précède qu'il y a une infinité de nombres premiers.

4°. Soit p un nombre premier qui divise F_n. Montrer que $2^{n+1} \mid p - 1$.

Exercice .3 On considère la suite de nombres entiers $\{U_n\}_{n \geq 0}$ définie par

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 1, \qquad U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$$

1°. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad$ PGCD$(U_{n+1}, U_n) = 1$.

2°. Montrer que $\forall\, (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \qquad U_{n+p-1} = U_{n-1}U_{p-1} + U_nU_p$.(On pourra raisonner par récurrence sur p).

3°. Soient $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si a et c sont premiers entre eux, alors PGCD$(bc, a) =$ PGCD(b, a).

4°. Déduire de ce qui précède que $\forall\, n \geq 0, \ \forall\, q > 0, \ \forall\, r \geq 0$ on a

$$\text{PGCD}(U_{qn+r}, U_n) = \text{PGCD}(U_{(q-1)n+r}, U_n).$$

puis que

$$\text{PGCD}(U_{qn+r}, U_n) = \text{PGCD}(U_n, U_r).$$

5°. Soit $m, n \in \mathbb{N}$, et $d = $ PGCD(m, n). Montrer que PGCD$(U_m, U_n) = U_d$.

Exercice .4

1°. Montrer que $\forall\ x \geq 0, \qquad 1 + x \leq e^x.$

2°. Montrer que la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ est décroissante sur $[1\ ,+\infty\ [$. En déduire que si $n \geq 1$ on a

$$\forall\ x \in [0, \frac{1}{n}], \qquad 1 + x \geq (1 + \frac{1}{n})\, e^{-1/n}\ e^x$$

3°. Considérons la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$v_n = \prod_{p=1}^{n}(1 + \frac{p}{n^2}) = (1 + \frac{1}{n^2})(1 + \frac{2}{n^2})\cdots(1 + \frac{n}{n^2})$$

Montrer, en utlisant les inégalités de (1°.) et de (2°.), que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est convergente, et déterminer sa limite.

Exercice .5

I. On considère la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 1$. En faisant une étude sommaire de cette fonction, montrer que l'équation $f(x) = 0$ a trois racines $r_1 < r_2 < r_3$, avec $r_1 \in [-2, -3/2]$ et $r_3 \in [3/2, 2]$.

II. On considère la suite $(x_n)_n$ définie par

$$x_0 = 2, \qquad x_{n+1} = \sqrt[3]{3x_n - 1}.$$

ı. Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in [3/2, 2]$, et que la suite $(x_n)_n$ est monotone.

ıı. Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge vers une racine ℓ de $f(x) = 0$. Préciser laquelle.

ııı. Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - \ell| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^n$. Combien de termes de la suite $(x_n)_n$ il faudrait calculer pour obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près.

III. On considère la suite $(y_n)_n$ définie par

$$y_0 = 2, \qquad y_{n+1} = \sqrt[3]{3y_n + 1}.$$

ı. Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad y_n \in [3/2, 2]$, et que la suite $(y_n)_n$ est monotone.

ıı. Montrer que la suite $(y_n)_n$ converge vers une limite ℓ' telle que $-\ell'$ soit une racine de $f(x) = 0$. Préciser laquelle.

ııı. Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad |y_n - \ell'| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^n$.

IV. Donner des valeurs approchées des racines r_1, r_2, r_3 de f à 10^{-6} près.

Omran Kouba

**Institut Supérieur des Sciences Appliquées
et de Technologie**

Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année

Exercice .1 Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \frac{(1 + \frac{t^2}{6}) \sin t - (t + \frac{t^3}{2}) \cos t}{t^5}.$$

Montrer que $\lim_{t \to 0} f(t)$ existe et la calculer.

Exercice .2 On donne des réels $r > 0$ et $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ et on note u le nombre complexe de module r et d'argument α.

I. On construit les points A_n du plan répondant aux conditions:

- A_0 est le point d'affixe 0.
- A_1 est le point d'affixe i.
- Pour tout entier n supérieur ou égale à 2, le point A_n est l'image de A_{n-2} par la similitude directe S_n, où S_n est la composée de la rotation R_n de centre A_{n-1} et d'angle α et de l'homothétie h_n de centre A_{n-1} et de rapport r (*i.e.* S_n est la similitude directe de centre A_{n-1} de rapport r et d'angle α). On note z_n l'affixe du point A_n.

1. Ecrire pour tout entier $n \geq 2$ une relation entre z_n, z_{n-1}, z_{n-2}.
2. Montrer que $\forall\ n \geq 2, \qquad z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1} i$.
3. Déterminer l'expression de l'affixe z_n de A_n en fonction de n et de u.

II. 1. Montrer qu'il existe une unique similitude directe S, telle que

$$A_1 = S(A_0) \qquad \text{et} \qquad A_2 = S(A_1)$$

Préciser le centre de S.

2. Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} = S(A_n)$. Dans la suite on note S^0 pour désigner l'application identité, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S^{n+1} = S \circ S^n$.

3. Montrer que S^4 est une homothétie.
4. En déduire que les points A_n sont éléments d'un ensemble formé par la réunion de quatre droites que l'on précisera.

III. On suppose maintenant $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On appelle ω l'affixe du centre Ω de la similitude S.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ sont orthogonaux.
2. Calculer $|\omega - z_n|$ en fonction de n et de $|\omega|$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} |\omega - z_n|$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $L_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |z_k - z_{k+1}|$. Etudier la limite de la suite $(L_n)_n$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice .3 Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ les trois ensembles, définis par:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \{z \in \mathbb{C} : \quad \overline{z} + z = 0\ \}; \\ \mathcal{D}_2 &= \{z \in \mathbb{C} : \quad \overline{z} - z = 0\ \}; \\ \mathcal{D}_3 &= \{z \in \mathbb{C} : \quad \overline{z} - z = 2i\}. \end{aligned}$$

1. Faire une figure representant ces ensembles.
2. Montrer que pour tout $z_1 \in \mathcal{D}_1$, il existe $z_2 \in \mathcal{D}_2$ et $z_3 \in \mathcal{D}_3$, tels que les points A_1, A_2, A_3 d'affixes respectifs z_1, z_2, z_3 forment un triangle équilatère direct $(A_1A_2A_3)$ (on exprimera z_2 et z_3 en fonction de z_1).
3. Montrer qu'il existe un point B tel que, lorsque A_1 décrit la droite $\mathcal{D}_1$, la droite passant par A_2 et A_3 passe toujours par B.

Institut Supérieur des Sciences Appliquées
et de Technologie

Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année

EXERCICE .1 On considère dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^4 - 3X + 20$.

i. Déterminer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$, tels que $P(X) = (X^2 + \alpha)^2 - (3\beta X + \gamma)^2$ (On commencera par déterminer β^2).

ii. Factoriser P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. En déduire une factorisation de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

iii. Montrer qu'il existe un cercle $\mathcal{C}$, qu'on demande de déterminer, qui contient toutes les racines de P.

EXERCICE .2 Calculer, dans $\mathbb{R}[X]$, le PGCD des deux polynômes suivants:

$$A(X) = X^7 + 9X^6 + 26X^5 + 32X^4 + 47X^3 + 50X^2 - 7X - 10$$
$$B(X) = X^6 + 7X^5 + 11X^4 + 2X^3 + 25X^2 - 17X - 13.$$

EXERCICE .3 On considère les deux fonctions g et h définies par

$$g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ g(x) = \frac{x\sqrt{x}}{6} - \sqrt{x} + \sin(\sqrt{x})$$
$$h :]-\infty, 0[\longrightarrow \mathbb{R},\ h(x) = \frac{x\sqrt{-x}}{6} - \sqrt{-x} + \operatorname{sh}(\sqrt{-x}).$$

i. Montrer que g et h sont 2-fois dérivables et calculer leurs dérivées premières et secondes.

ii. On définit la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ h(x) & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Montrer que f est 2-fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice .4 On considère la fonction $f : \mathbb{R}\backslash\{1,3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{-x^2 + 8x - 12}{x^2 - 4x + 3}.$$

$\imath$. Etudier et tracer le graphe de la fonction f.

$\imath\imath$. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(\{r\})$ contient en général deux éléments. Précisez le (ou les) cas d'exception.

$\imath\imath\imath$. Montrer que $f^{-1}(\{f(a)\})$ où $a \in \mathbb{R}\backslash\{1,3\}$ contient en général deux éléments. Calculer-les en fonction de a, en précisant le (ou les) cas d'exception.

$\imath v$. On considère l'appliction $g : \mathbb{R}\backslash\{1,3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \text{ Max}\left\{f^{-1}(\{f(x)\})\right\}.$$

Etudier et tracer le graphe de g. On montrera notamment que g est prolongable par continuité en $x = 1$, et $x = 3$.

Institut Supérieur des Sciences Appliquées
et de Technologie

Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année

EXERCICE .1 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X^3 + 2X + 1}{(X-1)^2(X^2+1)^4}$$

EXERCICE .2 Soit $f :]-1, +1[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \text{ Arc tg } \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$$

1°. Montrer qu'il existe une fraction rationnelle $F(X) \in \mathbb{R}(X)$ telle que $f'(t) = F(t)$ pour tout $t \in]-1, +1[$. Décomposer $F(X)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

2°. Déduire de ce qui précède qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, x \in]-1, +1[, \qquad f(x) = \frac{\pi}{4} + \text{ Arc tg}\, \alpha x + \text{ Arc tg}\, \beta x$$

3°. Donner un développement limité à l'ordre n de la fonction f au voisinage de 0.

EXERCICE .3 Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on considère les deux fonctions

$$h_1(x) = \text{Arc tg } \sqrt{\left|\frac{1-x}{1+x}\right|}$$

$$h_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\text{Arc sin } (x) & \text{si} \quad x \in]-1, +1] \\ -\frac{1}{2}\text{Arc sin } (\frac{1}{x}) & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

Montrer qu'il existe une relation simple entre h_1 et h_2. (On pourrait calculer les dérivées).

Exercice .4 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}\text{Arc sin }(x) & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ -\dfrac{x^2}{2}\text{Arc sin }(\dfrac{1}{x}) & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

1°. Etudier la parité de f.

2°. Montrer que $\forall\ x \geq 1, \qquad f(x) + \dfrac{x}{2} < 0.$

3°. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + \dfrac{x}{2} = 0.$

4°. Soit $g(x) = \text{Arc sin } x - \dfrac{1}{x}$, pour $x \in [0, 1]$. En étudiant la monotonie de g, montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]0, 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$. (On ne demande pas de déterminer α).

En déduire le signe de $f(x) + \dfrac{x}{2}$ sur l'intervalle $]0, 1[$. (On distinguera les cas $x < \alpha$ et $x > \alpha$).

5°. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0, 1]$. Calculer $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f'(x)$, si elle sxiste.

6°. Soit h la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par la relation $f'(x) = -xh(x)$. En étudiant la fonction h, montrer qu'elle s'annule une seule fois sur $]1, +\infty[$ en un point $\beta \in]1, \sqrt{2}[$, et que h garde un signe constant sur chacun des intervalles $]1, \beta[$ et $]\beta, +\infty[$. (On ne demande pas de déterminer β).

En déduire une étude du signe de f' sur $]1, +\infty[$.

7°. Utiliser ce qui précède pour étudier les variations de f, et donner une représentation graphique de son graphe.

On donne $\alpha \approx 0.67$; $\beta \approx 1.1$.

Institut Supérieur des Sciences Appliquées et de Technologie

Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année

Exercice .1 Considérons la courbe $\mathcal{C}$ définie en coordonnées polaires par $r = f(\theta)$, où

$$f(\theta) = \frac{2}{\cos\theta + \cos 3\theta} = \frac{1}{\cos\theta\,\cos 2\theta}$$

1°. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ présente une symétrie, préciser la, et l'utiliser pour réduire le domaine d'étude.

2°. Étudier les branches infinies et les asymptotes à la courbe en précisant la position de la courbe par rapport à elles.

3°. Donner un tableau représetant les variations de r sur le domaine d'études. Préciser sur ce même tableau le signe de r.

4°. Etudier la concavité de la courbe par rapport à l'origine, En déterminant les points d'inflexion eventuels.

5°. Donner un tracé précis de la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice .2 Soient

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2+3t-2}{t^2-3t+2} = 1 + 2(\dfrac{4}{t-2} - \dfrac{1}{t-1}) \\ y(t) = \dfrac{t^2+t+2}{t^2-t-2} = 1 + \dfrac{2}{3}(\dfrac{4}{t-2} - \dfrac{1}{t+1}) \end{cases}$$

Etudier et tracer la courbe paramétrées $t \longrightarrow M(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ en précisant notamment les asymptotes, la position de la courbe par rapport aux asymptotes, l'intersection de la courbe avec les asymptotes, les points stationnaires (ou singuliers) eventuels,et les points d'inflexion eventuels.

Exercice .3 Calculer les primitives des fonctions définies par:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x^3-1)^2}, \quad g(x) = \frac{1}{(2+\cos x - 2\sin x)\sin x}, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}.$$

Omran Kouba

Institut Supérieur des Sciences Appliquées et de Technologie

Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année

Exercice .1 On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{R}[X]$ par

$$P_0(X) = 1, \qquad P_1(X) = X, \qquad P_n(X) = \frac{1}{n!}X(X-n)^{n-1} \text{ pour } n \geq 2.$$

1°. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $\quad P_n'(X) = P_{n-1}(X-1)$. En déduire que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n \geq k, \qquad P_n^{(k)}(X) = P_{n-k}(X-k)$$

(Ici $P_n^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P_n. On convient que $P^{(0)} = P$).

2°. Montrer que, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\quad \forall\, n > k$, $\qquad P_n^{(k)}(k) = 0$, et déterminer $P_n^{(n)}(X)$.

Dans la suite m désigne un entier supérieure à zéro donné. $E = \mathbb{R}_m[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieure ou égale à m.

3°. Montrer que $P_0, P_1, \ldots, P_m$ forment une base de E.

4°. Montrer que $\forall\, Q \in E$, $\qquad Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} Q^{(k)}(k)P_k(X)$.

5°. En déduire que $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $P_m(X+a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} P_{m-k}(a)P_k(X)$.

Exercice .2 Soit A la matrice d'ordre 4 suivante

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 6 & 1 & 7 \\ 2 & 16 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 8 & 22 \end{bmatrix}$$

1°. Trouver une matrice triangulaire supérieure U, et une matrice triangulaire inférieure L dont tous les éléments diagonaux sonts égaux à 1, telles que $A = L.U$

2°. Calculer les inverses de L et de U en déduire A^{-1}.

EXERCICE .3 Calculer les primitives des fonctions suivantes:

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^5(1+x+x^2)^2}, \qquad g(x) = \frac{\cos(\sqrt{x}) + \sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x})}.$$

EXERCICE .4 déterminer le triédre de Frenet ainsi que la courbure et la torsion de l'arc paramétré γ dans les cas suivants :

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (\operatorname{sh} t,\ \operatorname{ch} t, t)$$
$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto (at^2, at^3, \frac{9}{16}at^4)$$

EXERCICE .5 Chercher la longueur de l'arc $OM(t)$ où $M(t)$ décrit la courbe

$$\begin{cases} x(t) & = & 2t^3 + 3t^2 \\ y(t) & = & 3t^2 + 6t \end{cases}$$

EXERCICE .6 On considère le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et identifié à $\mathbb{R}^2$.

Soit C l'arc géométrique défini par la représentation paramétrique:

$$F : [0, 4\pi] \longleftarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{bmatrix} t + \sin t - 4\sin(t/2) \\ \\ 3 + \cos t - 4\cos(t/2) \end{bmatrix}.$$

1°. Quelle est la longueur de l'arc C ?

2°. Soit $t \in]0, 4\pi[$ et soit $M = f(t)$.

- Quel est le rayon de courbure de C en M ?
- Exprimer les coordonnées de I, le centre de courbure au point M.

3°. Quelle est la développée Γ de C. reconnaître Γ.

Institut Supérieur des Sciences Appliquées et de Technologie

Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année

Exercice .1 On donne dans $\mathbb{R}^4$: $e_1 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$, $e_2 = (1/2, -1/2, -1/2, 1/2)$. On désigne par $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les droites vectorielles $\mathbb{R}e_1$ et $\mathbb{R}e_2$ puis par H le sous-espace vectoriel engendré par (e_1, e_2).

1°. Soit $a = (3, -1, 2, 4)$. Trouver la projection orthogonale b de a sur H et calculer la distance δ de a à H.

2°. Former la matrice S_i de la symétrie orthogonale par rapport à D_i où $i = 1$ ou 2, sur la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

3°. On pose $A = S_1.S_2$. Montrer que A est la matrice d'une symétrie orthogonale.

4°. Trouver le noyau de $A + I_4$. En déduire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à H et préciser ce que représente A.

5°. Trouver la matrice de la projection orthogonale sur H (dans la base canonique) et vérifier le résultat de 1°. concernant b.

Exercice .2 Soient E un espace euclidien, s et t deux symétries orthogonales de E. Démontrer que les énoncés suivants sont équivalents:

i. $s \circ t$ est une symétrie vectorielle.

ii. $s \circ t$ est une symétrie vectorielle orthogonale.

iii. $s \circ t = t \circ s$.

Exercice .3 Soit $\mathcal{B} = \{e_i\}_{1 \leq n}$, une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. On désigne par s_i la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}.e_i$ et par H le sous-espace vectoriel engendré par e_1 et e_2.

1°. Former sur la base $\mathcal{B}$ les matrices S_1 et S_2 de s_1 et s_2, et calculer les produits $A = S_1.S_2$, $A' = S_2.S_1$.

2°. Montrer $-s_1 \circ s_2$ est la symétrie orthogonale par rapport à H et dire ce qu'est l'endomorphime $s_1 \circ s_2$.

Exercice .4 On considère l'équation difféetielle suivante

$$(t^2-1)y' + ty = t^3 - t \qquad (\mathcal{E})$$

1°. Déterminer les solutions de $\mathcal{E}$ sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$, $]1,+\infty[$.

2°. Déterminer les solutions de $\mathcal{E}$ définies sur $\mathbb{R}$.

3°. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note Ψ_α la solution de $\mathcal{E}$ définie sur $]-1,1[$ telle que $\Psi_\alpha(0) = \alpha$. Tracer, sur le même graphique, le graphe de Ψ_α pour $\alpha \in \{0, -1/3, -2/3, -2\}$.

Exercice .5 Résoudre le problème différentiel suivant:

$$y'' - 5y' + 4y = 32x^2 + 16\cos x$$

$$y(0) = 0, \; y'(0) = 0.$$

Exercice .6 Résoudre le système linéaire suivant:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & + & 5t & = & 6 \\ 4x & - & y & - & 5z & - & 8t & = & 1 \\ 6x & + & 5y & + & 3z & + & t & = & 5 \end{array}$$

Institut Supérieur des Sciences Appliquées et de Technologie

Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année

Dans tout le problème, p désigne un nombre premier donné.
Le but de ce problème est de démontrer que tout groupe fini d'ordre p^2 est commutatif.

I

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Pour $z \in G$, on appelle *stabilisateur de* z l'ensemble

$$\mathrm{stab}\,(z) = \{g \in G \,|\, gzg^{-1} = z\}.$$

Et on appelle *orbite de* z l'ensemble

$$O(z) = \{h^{-1}zh \,|\, h \in G\}.$$

On se propose dans cette partie de démontrer que, si G est fini et si z est un élément de G, alors

$$\mathrm{Card}\,(O(z))\mathrm{Card}\,(\mathrm{stab}\,(z)) = \mathrm{Card}\,(G). \qquad (*)$$

1°. Montrer que $\mathrm{stab}\,(z)$ est un sous-groupe de G.

12°. On considère la relation binaire $\Re_z$ sur G définie par

$$x \,\Re_z\, y \Longleftrightarrow xy^{-1} \in \mathrm{stab}\,(z)$$

Montrer que $\Re_z$ est une relation d'équivalence.

3°. Notons $G/\Re_z$ l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\Re_z$. Montrer que

a. Si $A \in G/\Re_z$ (*i.e.* A est une classe d'équivalence), alors

$$\mathrm{Card}\,(A) = \mathrm{Card}\,(\mathrm{stab}\,(z)).$$

b. Pour $h^{-1}zh \in O(z)$, on pose $\Phi(h^{-1}zh) = [h]$ (classe de h). Montrer que Φ définit une application de $O(z)$ dans $G/\Re_z$ et que cette application est bijective.

4°. Conclure.

II

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On appelle le *centre de* G l'ensemble

$$\mathcal{Z}_G = \{z \in G \,|\, \forall g \in G, \quad gz = zg\}.$$

1°. Montrer que $\mathcal{Z}_G$ est un sous-groupe de G, et que $G = \mathcal{Z}_G$ si, et seulement si, G est commutatif.

2°. On considère la relation binaire $\Re$ sur G définie par

$$x \,\Re\, y \iff \exists g \in G,\ gxg^{-1} = y$$

Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

3°. Montrer que si $z \in G$, alors $[z]_{\Re} = O(z)$.

4°. Montrer que $\operatorname{Card}(O(z)) = 1 \iff z \in \mathcal{Z}_G$.

5°. On suppose que G est fini et non commutatif. Montrer qu'il existe $z_1, z_2, \ldots, z_m$ dans $G \setminus \mathcal{Z}_G$ tels que

$$\operatorname{Card}(G) = \operatorname{Card}(\mathcal{Z}_G) + \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Card}(O(z_k)).$$

6°. On suppose que $\operatorname{Card}(G) = p^n$. Montrer, en utilisant le résultat $(*)$ de la partie I. et II.4°., que si $z \notin \mathcal{Z}_G$ alors p divise $\operatorname{Card}(O(z))$.

7°. Conclure que si $\operatorname{Card}(G) = p^n$, alors p divise $\operatorname{Card}(\mathcal{Z}_G)$.(On pourrait utiliser 5°. et 6°).

III

Soit $(G, \cdot)$ un groupe de cardinal p^2. Il s'agit de démontrer que G est commutatif. On va raisonner par l'absurde, on suppose donc que $\operatorname{Card}(\mathcal{Z}_G) < p^2$.

1°. Montrer que $\operatorname{Card}(\mathcal{Z}_G) = p$, (Utiliser II.7°.).

2°. On considére la relation d'équivalence $\widetilde{\Re}$ sur G définie par

$$x \,\widetilde{\Re}\, y \iff xy^{-1} \in \mathcal{Z}_G.$$

Notons $G/\mathcal{Z}_G$ l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\widetilde{\Re}$. Soient A et B deux éléments de $G/\mathcal{Z}_G$, montrer que $[x.y]_{\widetilde{\Re}}$ ne dépend pas du choix de x dans A et de y dans B. On note cette classe $A * B$. Montrer que $(G/\mathcal{Z}_G, *)$ est un groupe de cardinal p. Il est donc cyclique.

3°. Soit $h \in G$ tel que $[h]_{\widetilde{\Re}}$ soit un générateur de $(G/\mathcal{Z}_G, *)$. Montrer que tout élément de G s'écrit sous la forme zh^r avec $z \in \mathcal{Z}_G$ et $r \in \mathbb{Z}$. Puis que G est commutatif et conclure.

**Institut Supérieur des Sciences Appliquées
et de Technologie**

**Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année**

Exercice .1 Soit $(G,\cdot)$ un groupe fini, e son élément neutre.

1°. Notons $A=\{x\in G\,|\,x^2\neq e\}$, et définissons la relation binaire $\Re$ sur A:

$$x\,\Re\,y \iff y\in\{x,x^{-1}\}.$$

a. Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

b. Montrer que $\forall\, x\in A,\quad \mathrm{Card}\,([x]_{\Re})=2$.

c. Montrer que $\mathrm{Card}\,(A)$ est pair.

2°. On suppose que le groupe G est de cardinal pair. Montrer que le cardinal de l'ensemble $\{x\in G\,|\,x^2=e\}$ est pair.

3°. En déduire que tout groupe fini d'ordre pair contient un sous groupe d'ordre 2.

Exercice .2 Pour $n\geq 3$, on pose

$$v_n=\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k\mathrm{Log}\,k};\qquad u_n=\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,n-v_n.$$

1°. Montrer que $\forall\, y\in\mathbb{R}^+,\qquad \dfrac{y}{1+y}\leq \mathrm{Log}\,(1+y)\leq y.$

2°. On note pour $x>1$, $f(x)=\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,(1+x)-\mathrm{Log}\,\mathrm{Log}\,(x)$.

a. Montrer que $f(x)=\mathrm{Log}\,(1+y)$ avec $y=[\mathrm{Log}\,(1+1/x)]\,/\mathrm{Log}\,(x)$.

b. Utiliser 1°. deux fois pour conclure que

$$\forall\, x>1,\qquad \frac{1}{(1+x)\mathrm{Log}\,(1+x)}\leq f(x)\leq\frac{1}{x\mathrm{Log}\,(x)}.$$

3°. En déduire que pour $3\leq n<m$, on a $0\leq u_m-u_n\leq \dfrac{1}{n\mathrm{Log}\,n}-\dfrac{1}{m\mathrm{Log}\,m}$.

4°. Montrer qu'il existe $\delta\in\mathbb{R}$ tel que pour $n\geq 3$,on a $0\leq\delta-u_n\leq\dfrac{1}{n\mathrm{Log}\,n}$.

5°. Pour $m\geq 2$, on pose $I_m=\displaystyle\sum_{k=m+1}^{m^2}\frac{1}{k\mathrm{Log}\,k}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}I_m=\mathrm{Log}\,2$.

Exercice .3

1°. Montrer que l'équation $1+x-x^3=0$ admet une unique solution réelle r qui appartient à $[1,3/2]$.(On pourrait étudier la fonction $f(x)=1+x-x^3$)

2°. On se propose de déterminer r. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,on pose $g(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$, et on considère la suite

$$\begin{cases} x_0 & = & 1 \\ x_{n+1} & = & g(x_n) \end{cases}$$

a. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in [1,3/2]$.

b. Montrer que $\forall\, x,y \in [1,3/2], \quad |g(x)-g(y)| \leq \dfrac{|x-y|}{2}$.

c. En déduire que $\forall\, n \geq 0, \quad |x_{n+1}-x_n| \leq 2^{-(n+1)}$.

d. Montrer que $0 \leq n < m \Longrightarrow \quad |x_m - x_n| \leq 2^{-n}$.

e. Conclure que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite $\ell \in [1,3/2]$, et que $\ell = r$ la racine de l'équation de 1°.

f. Montrer que $\forall\, n \geq 1, \quad |x_n - r| \leq |x_{n-1} - x_n|$.

g. Déterminer une valeur approchée de r à 10^{-6} près. On présentera les résultats sous forme d'un tableau contenat n, x_n et $|x_{n-1}-x_n|$.

**Institut Supérieur des Sciences Appliquées
et de Technologie**

Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année

EXERCICE .1 Soit S l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{Z}$ du système

$$\begin{cases} x = & 1 & \mod & 6 \\ x = & 6 & \mod & 35 \\ x = & 35 & \mod & 143 \end{cases}$$

Déterminer $x_0 \in S$ tel que $|x_0| = \min\{|x| : x \in S\}$.

EXERCICE .2 Soit $(a, \mu, \nu) \in]-1, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On considère la fonction

$$g :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : \; g(x) = \begin{cases} \mathrm{Log}\,(1+x) & \text{si} \quad x \in \;]-1, a] \\ \nu(x-1)^2 + \mu & \text{si} \quad x \in \;]a, +\infty[\end{cases}$$

On suppose que g est de classe C^2. Déterminer a, μ, ν.

EXERCICE .3 Soit $(A_1A_2A_3A_4)$ un quadrilatère convexe du plan. Sur les cotés A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 exterieurement à ce quadrilatère, on construit quatre carrés de centres respectifs B_1, B_2, B_3, B_4. On se propose de démontrer que les milieux C_1, C_2, C_3, C_4 de B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_1 respectivement forment un carré.

On note z_1, z_2, z_3, z_4 les affixes des points A_1, A_2, A_3, A_4 respectivement.

1°. Calculer les affixes w_1, w_2, w_3, w_4 des points B_1, B_2, B_3, B_4 .

2°. Calculer les affixes v_1, v_2, v_3, v_4 des points C_1, C_2, C_3, C_4 .

3°. Soit $\Omega = \dfrac{1}{4}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4)$. montrer que $v_k - \Omega = (i)^{k-1}(v_1 - \Omega)$ $(k = 2, 3, 4)$.

4°. Conclure.

EXERCICE .4

1°. Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$ définis par

$$A(X) = X^6 + 3X^5 + 2X^4 + 6X^3 + X^2 + 2X - 3$$
$$B(X) = X^5 + 4X^4 + 5X^3 + 8X^2 + 8X + 6.$$

Calculer $D(X) = \mathrm{PGCD}\,(A(X), B(X))$.

2°. Trouver $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $UA + VB = D$.

Exercice .5 Simplifier l'expression suivante

$$2 \text{ arc tg}\, x + \text{ arc tg}\, \frac{7-2x-7x^2}{1+14x-x^2}.$$

Exercice .6 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$, et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c).$$

Problème

I

1°. Soient $\alpha \in]1,+\infty[$. Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{(x+1)^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{(x+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{1}{x^\alpha}.$$

2°. On note $b_m(\alpha) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^\alpha}$. $(m \in \mathbb{N}^*,\ \alpha \in]1,+\infty[)$.

- Montrer que la suite $\{b_m(\alpha)\}_{m\geq 1}$ converge. On note sa limite $b(\alpha)$.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^\alpha} \leq b(\alpha) - b_n(\alpha) \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

II

1°. Montrer qu'il existe un polynôme et un seul P, vérifiant

$$\begin{cases} P(1) = P'(1) = P''(1) = 0; \\ P'(0) = 0; \\ P^{(4)} = 1. \end{cases}$$

Reponse: $P(X) = \frac{1}{72}(X-1)^3(3X+1)$.

2°. Trouver un polynôme Q de degré 5, tel que $Q' = P$.

3°. Soit $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, telle que $\forall x \in [0,1]\ F'(x) = P(x)g(x)$, où $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. Montrer

$$-\frac{1}{180}M \leq F(1) - F(0) \leq -\frac{1}{180}m.$$

où l'on a posé $M = \sup_{t\in[0,1]} g(t)$, $m = \inf_{t\in[0,1]} g(t)$. (On pourrait considérer la fonction $\psi(t) = F(t) - F(0) - (Q(t) - Q(0))A$, avec $A = m$ ou $A = M$).

4°. Soit $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^5. On note $g(x) = f(1+x) - f(1-x)$, et $F(x) = \sum_{k=0}^{4}(-1)^k P^{(4-k)}(x)g^{(k)}(x)$.

Montrer que F est une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$, calculer F', puis montrer qu'il existe $\xi \in [0,1]$ tel que

$$f(2) - f(0) - \frac{1}{3}\left(f'(2) + 4f'(1) + f'(0)\right) = -\frac{1}{180}[f^{(5)}(1+\xi) + f^{(5)}(1-\xi)].$$

III

On note, pour $n \geq 1$,

$$a_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

$$A_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1°. Montrer que la suite $\{A_n - a_n\}_{n\geq 1}$ converge.

2°. En considérant $f(x) = \sqrt{x+n}$. Montrer, pour $n \geq 1$, que

$$-\frac{7}{192}\frac{1}{n^{9/2}} \leq A_{n+1} - A_n \leq -\frac{7}{192}\frac{1}{(n+1)^{9/2}}.$$

3°. Montrer que pour tout $m > n$,

$$\frac{7}{192}\left(b_m(\frac{9}{2}) - b_n(\frac{9}{2})\right) \leq A_n - A_m \leq \frac{7}{192}\left(b_m(\frac{9}{2}) - b_n(\frac{9}{2})\right) + \frac{7}{192}\frac{1}{n^{9/2}}$$

(Pour la notation $b_n(\alpha)$ voir **I**).

4°. En déduire que la suite $\{A_n\}_{n\geq 1}$ converge vers une limite δ, et que si l'on pose $B_n = A_n - \dfrac{1}{96n^3\sqrt{n}}$ alors

$$|B_n - \delta| \leq \frac{7}{192n^4\sqrt{n}}.$$

Donner un encadrement de $B_n - \delta$ pour $n = 4, 9, 16$, puis donner la valeur de δ à 10^{-6} près.

5°. Que peut-on dire concernant la suite $\{a_n\}_{n\geq 1}$?

Omran Kouba

Institut Supérieur des Sciences Appliquées
et de Technologie

Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année

Exercice .1 Discuter, suivant les valeurs de a, b et c dans $\mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général

$$u_n = n^2 \left(\text{Log}\,(n^2 + n + a) - b\text{Log}\,n - \frac{1}{n+c} \right).$$

Exercice .2 On considère la fraction rationnelle suivante:

$$F(X) = \frac{4X^2 + 17X + 17}{(X+1)(X+2)^2(X+3)^2}.$$

1°. Montrer que La série $\sum u_n$ avec $u_n = F(n)$ est convergente.

2°. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle F.

3°. En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$.

Exercice .3 On considère la fonction

$$f(x) = \sqrt{\left| \frac{(x+1)(x^2 - x + 2)}{x+2} \right|}.$$

On se propose d'étudier f et de tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f.

1°. Donner l'ensemble de définition de f et de sa dérivée f'.

2°. Déterminer les branches infinies de la courbe représentative de f. (On précisera la position de la courbe par rapport aux asymptotes eventuelles.)

3°. Mettre $x \mapsto f(x)f'(x)$ sous forme d'une fraction rationnelle simple.
En déduire le tableau de variation de f.

4°. Etudier l'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec les asymptotes.

5°. Mettre $x \mapsto (f(x))^3 f''(x)$ sous forme d'une fraction rationnelle simple.
En déduire les points d'inflexion de f.

6°. Effectuer un tracé complet de la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice .4 Calculer les primitives des fonctions suivantes:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2}. \\ g(x) &= \frac{1}{(1+4\cos x+7\sin x)\cos x}. \\ h(x) &= \sqrt{\frac{1+\sqrt[3]{x}}{x}}. \end{aligned}$$

Exercice .5 On considère la la courbe paramétrée définie par:

$$\begin{array}{ccccc} x(t) & = & t & + & \dfrac{4}{t} \\ y(t) & = & -t & + & \dfrac{1}{4-t} \end{array}$$

1°. Déterminer l'ensemble de définition de $t \mapsto M(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \\ y(t) \end{bmatrix}$.

2°. Etudier les branches infinies de la courbe.(asymptotes, position de la courbe par rapport aux asymptotes, intersection de la courbe avec les asymptotes).

3°. Donner le tableau de variation.

4°. Déterminer les points multiples (s'il y en a).

5°. Donner une expression aussi simple que possible de $x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)$. En déduire les points d'inflexion de la courbe.

6°. Donner un tracé précis.

Institut Supérieur des Sciences Appliquées et de Technologie

Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année

Exercice .1 Soit E_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égale à n.($n > 2$).

1°. Quelle est la dimension de E_n ? (Justifier votre réponse).

2°. On pose $Q_0(X) = 1$, et $Q_k(X) = X(X+1)\cdots(X+k-1)$ pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Montrer que $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$ est une base de E_n.

3°. Si $P(X) \in E_n$, on note $\Phi(P)$ le polynôme défini par

$$\Phi(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

a. Calculer $\Phi(Q_k)$, pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

b. Montrer que Φ est un endomorphisme de E_n.

c. Utiliser *a*. pour démontrer que Im $\Phi = E_{n-2}$.

d. Montrer que si $t \mapsto P(t)$ est une fonction polynomiale périodique, alors $P \in E_0$.

e. En déduire que Ker $\Phi = E_1$.

Exercice .2 Soit E un espace vectoriel de dimension m. On note I_E l'application identité de E.

1°. On considère un endomorphisme $S \in \mathcal{L}(E)$ tel que $S \circ S = I_E$ et $S \notin \{I_E, -I_E\}$. On pose $E_1 =$ Ker $(I_E - S)$, et $E_2 =$ Ker $(I_E + S)$.

a. Montrer que $E_1 =$ Im $(I_E + S)$, et que $E_2 =$ Im $(I_E - S)$.

b. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$ et que $E_1 \neq \{0\}$, $E_2 \neq \{0\}$.

c. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_m)$ de E et un entier $r \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ tels que

$$S(e_i) = \begin{cases} e_i & \text{si} \quad i \leq r \\ -e_i & \text{si} \quad r < i \leq m \end{cases}$$

2°. E désigne $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Soient $a, b \in \mathbb{R}$,$(a \neq b)$. Pour $P \in E$, on note

$$S(P)(X) = (X-a)^n \, P\left(\frac{X-b}{X-a}\right).$$

a. On pose $v_k = (X-1)^k,\ k = 0, 1, \ldots, n$. Calculer $S(v_k)$. En déduire que S définit un isomorphisme de E. Exprimer $S(v_k)$ sur la base $\{v_j\}_{0\leq j\leq n}$.

b. On note $w_k = (X-a)^{n-k}(X-b)^k,\ k = 0, 1, \ldots, n$. Montrer que $\{w_j\}_{0\leq j\leq n}$ forme une base de E.

c. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que $S \circ S = I_E$.

d. On suppose que $(a, b) = (1, 0)$.

- Donner une base de $E_1 = \text{ Ker } (I_E - S)$, et de $E_2 = \text{ Ker } (I_E + S)$.
- Déterminer en fonction de n la dimension de E_1 et celle de E_2.

Exercice .3 On se propose d'étudier la courbe $\mathcal{C}$ déterminée en coordonnées polaires par $\rho = f(\theta)$ où

$$f(\theta) = \frac{\cos(\theta/2)}{1 - 2\cos(\theta/2)}.$$

1°. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f. Sur quel intervalle suffit-il d'étudier f pour obtenir la courbe $\mathcal{C}$?

On note $\mathcal{C}_1$ la partie de $\mathcal{C}$ décrite lorsque θ parcourt $\mathcal{D} \cap [0, 2\pi]$. Dire comment obtenir $\mathcal{C}$ à partir de $\mathcal{C}_1$.

2°. Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_1$; et déterminer la position de la courbe $\mathcal{C}_1$ par rapport aux asymptotes au voisinage de l'infini.

3°. Donner un tableau précisant le signe de ρ', les variations de ρ, le signe de ρ et les tangentes aux points importants.

4°. Montrer que la recherche des points d'inflexion revient à résoudre une équation $P(\cos(\theta/2)) = 0$ où P est un polynôme de troisième degré. Étudier P et montrer qu'il admet une et une seule racine réelle α et que $\alpha \in]2/3, 4/5[$. En déduire que $\mathcal{C}_1$ admet un seul point d'inflexion en $\theta_0 \in]0, \pi/2[$. (On exprimera θ_0 en fonction de α).

5°. Tracer $\mathcal{C}$. Quel est le nombre de points multiples de $\mathcal{C}$? (On ne demande pas de les déterminer).

Exercice .4

I

1°. Étudier les limites suivantes:

a. $\dfrac{\text{Log } \sin^2\theta}{\cos^2\theta}$ pour $\theta \longrightarrow \pi/2$.

b. $-(\text{tg}^2\theta)(\text{Log}\sin\theta)$ pour $\theta \longrightarrow \pi/2$ et $\theta \longrightarrow 0$ avec des valeurs positives.

2°. Montrer que sur $]0,\pi[$, $\cos^2\theta + \text{Log}\sin^2\theta \leq 0$. En déduire le sens des variations de la fonction $\theta \longrightarrow -(\text{tg}^2\theta)(\text{Log}\sin\theta)$ sur l'intervalle $]0,\pi/2[$.

3°. *Application:* Tracer la courbe d'équation polaire

$$\rho = (\sin\theta)^{-\text{tg}^2\theta}, \qquad \theta \in [0,\pi/2].$$

II

1°. Déterminer les extrémums de $F : \theta \longrightarrow \sin^2\theta\cos\theta$ sur l'intervalle $[0,\pi/2]$, et faire un tableau de variation.

2°. Déterminer le nombre de solutions sur $[0,\pi/2]$ de l'équation $F(\theta) = 1/4$. En donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

3°. *Application:* Tracer la courbe d'équation polaire

$$\rho = (\sin\theta)^2 \qquad \theta \in [0,\pi/2].$$

Préciser les coordonées (exactes) du point à tangente parallèle à Oy. Donner des valeurs approchées des ordonnées des points d'abscisse $1/4$.

4°. Trouver une primitive de $\sqrt{1+3u^2}$ sur $\mathbb{R}$, le résultat devra être donné en fonction de u au moyen des fonctions $\sqrt{\ }$ et Log.

Application: Sachant que la longueur ℓ de la courbe de 3°. est donnée par

$$\ell = \int_0^{\pi/2} \|T_\theta\|\, dt$$

où $\|T_\theta\|$ est la longueur du vecteur tangente T_θ à la courbe en θ. Déterminer ℓ.

III

On désigne par α un réel quelconque et par C_α la courbe d'équation polaire:

$$\rho = (\sin\theta)^{-\alpha} \qquad \theta \in]0, \pi[.$$

1°. Montrer que C_α est symétrique par rapport à Oy.

2°. Reconnaître et tracer les courbes: C_{-1},C_0,C_1.

3°. Discuter suivant la valeur de α l'allure de C_α pour $\theta \longrightarrow 0$ avec des valeurs positives.

4°. Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la courbe C_α a un point d'inflexion et un seul I_α dans $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid x \geq 0, \quad y \geq 0\}$.

   a. Déterminer les coordonnées de I_α en fonction de α.

   b. Trouver le lieu de I_α(par son équation polaire).

5°. Utiliser ce qui précède pour tracer sommairement C_2. Donner les coordonnées des points d'inflexion.

Institut Supérieur des Sciences Appliquées
et de Technologie

Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année

EXERCICE .1 Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note A_λ la matrice

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 1+\dfrac{\lambda^2}{2} & -\dfrac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ \dfrac{\lambda^2}{2} & 1-\dfrac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ \lambda & -\lambda & 1 \end{bmatrix}$$

On note aussi $\mathcal{G}$ l'ensemble $\{A_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1°. Démontrer que toute matrice de $\mathcal{G}$ s'écrit de manière unique sous la forme $I+\lambda B+\dfrac{\lambda^2}{2}C$, où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et B, C deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ indépendantes de λ.

2°. Calculer BC,CB, B^2, C^2, B^3, C^3.

3°. Trouver une relation simple entre A_λ, A_μ et $A_{\lambda+\mu}$.

4°. En déduire que $\mathcal{G}$ muni de la loi de multiplication de matrices est un groupe commutatif.

5°. Calculer $(A_\lambda)^n$ en fonction de $(A_\lambda)^2$, A_λ, n et I.

EXERCICE .2 On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 4.

On considère les deux endomorphismes suivants de $\mathcal{E}$:

$$d : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} : P(X) \mapsto P'(X).$$
$$\delta : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X).$$

1°. Soit $\mathcal{B}_1$ la base de $\mathcal{E}$ définie par:

$$e_0 = 1, \qquad e_1 = X, \qquad e_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}, \quad (2 \leq k \leq 4).$$

a. Écrire la matrice Δ de δ dans la base $\mathcal{B}_1$.($i.e.$ $\Delta = Mat\,(\delta, \mathcal{B}_1)$).

b. Calculer Δ^2, Δ^3 et Δ^4.

c. Écrire la matrice D de d dans la base $\mathcal{B}_1$.($i.e.$ $D = Mat\,(d, \mathcal{B}_1)$).

d. En déduire une expression de d en fonction de δ, δ^2, δ^3 et δ^4.

2°. Soit $\mathcal{B}_2$ la base de $\mathcal{E}$ définie par:

$$f_0 = 1, \quad f_1 = X, \quad f_2 = \frac{X^2}{2}, \quad f_3 = \frac{X^3}{6}, \quad f_4 = \frac{X^4}{24}.$$

a. Écrire la matrice $\widetilde{\Delta}$ de δ dans la base $\mathcal{B}_2$.(*i.e.* $\widetilde{\Delta} = Mat\,(\delta, \mathcal{B}_2)$).

b. Écrire la matrice $\widetilde{D}$ de d dans la base $\mathcal{B}_2$.(*i.e.* $\widetilde{D} = Mat\,(d, \mathcal{B}_2)$).

c. Calculer $\widetilde{D}^2$, $\widetilde{D}^3$ et $\widetilde{D}^4$.

d. En déduire une expression de δ en fonction de d, d^2, d^3 et d^4.

Exercice .3 Pour $t \in [0, \pi/2[$ et $x \in [0, \pi/2]$, on pose

$$f(t, x) = \frac{\operatorname{Log}\,(1 + \cos x \cos t)}{\cos t}$$

1°. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0, \pi/2]$.

Dans la suite du problème, on pose pour $x \in [0, \pi/2]$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t, x)\, dt$.

2°. Montrer que F est continue et dérivable sur $[0, \pi/2]$.

3°. Calculer $F'(x)$ pour $x \in [0, \pi/2]$.

4°. En déduire une expression simple de $F(x)$ pour $x \in [0, \pi/2]$.

5°. Utiliser ce qui précède pour évaluer l'intégrale suivante:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Log}\,(1 + u)}{u\sqrt{1 - u^2}}\, du.$$

Exercice .4 Soit f une fonction réelle de classe C^2 sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1°. En effectuant une intgration par parties, montrer que

$$-f(x) = (1 - x)\int_0^x tf''(t)\, dt + x\int_x^1 (1 - t)f''(t)\, dt$$

2°. En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$ l'on a

$$f(x) \geq -\frac{x(1 - x)}{2} \sup_{t \in [0,1]} f''(t).$$

Institut Supérieur des Sciences Appliquées
et de Technologie

Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année

Exercice .1 On considère la courbe Γ_λ définie par la paramétrisation:

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto M(t) = \begin{bmatrix} t + \dfrac{\operatorname{sh}\lambda - \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} \\ \dfrac{1 + \operatorname{sh}\lambda . \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} \end{bmatrix}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1°. Quelle relation y a-t-il entre Γ_λ et $\Gamma_{-\lambda}$?

2°. Montrer qu'il existe un point P_λ et un seul où la tangente à la courbe Γ_λ est parallèle à Oy. Quelle est la courbe décrite par P_λ lorsque λ varie dans $\mathbb{R}$.

3°. Montrer qu'il existe un point N_λ et un seul où la courbe Γ_λ n'est pas régulier en ce point. Quelle est la courbe décrite par N_λ lorsque λ varie dans $\mathbb{R}$.

4°. On note Γ_λ^- (resp.Γ_λ^+) la partie de la courbe Γ_λ décrite lorsque t varie dans $]-\infty, \lambda[$ (resp. $]\lambda, +\infty[$). Montrer que Γ_λ^- et Γ_λ^+ sont des courbes birégulières et déterminer leurs développées.

Exercice .2 On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels muni du produit scalaire:

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x).Q(x)\, dx.$$

1°. Trouver une base du sous-espace F des polynômes de degré inférieur où égale à 3 qui s'annulent en 0 et en 1.

2°. Donner une base orthonormale de F.

3°. Donner la projection orthogonale de X^n sur F.

4°. Donner la symétrie orthogonale de X^n par rapport à F.

Exercice .3 Soit, pour n un entier ≥ 2, $A_n = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice réelle d'ordre $n+1$ définie par $a_{ij} = 0$ si $|i-j| \neq 1$, $a_{ii+1} = i$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a_{j+1j} = n+1-j$ pour $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & & & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & n-1 & 0 \\ \vdots & & & & 2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1°. On suppose $n = 5$. Montrer que A_5 est inversible et calculer A_5^{-1}.(On pourrait résoudre $A_5 X = Y$).

2°. On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On considère les deux bases de E_n:

$\mathcal{E} : (e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ où $e_k = X^{k-1}$; $k = 1, 2, \ldots, n+1$.

$\mathcal{F} : (f_1, f_2, \ldots, f_{n+1})$ où $f_k = (X-1)^{k-1}(X+1)^{n-k+1}$; $k = 1, 2, \ldots, n+1$.

enfin si $P \in E_n$ on pose $D(P) = nXP + (1-X^2)P'$.

a. Montrer que si $P \in E_n$ alors $D(P) \in E_n$.

b. Écrire $Mat(D, \mathcal{E})$ et $Mat(D, \mathcal{F})$ les matrices de D dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ respectivement.

c. En déduire une expression simple de $\det A_n$.

d. Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que A_n soit inversible.

3°. On suppose que $n = 2p+1$.

a. Montrer qu'il existe un polynôme P_0 et un seul dans E_n tel que $D(P_0) = 1$.

b. Montrer que $\deg P_0 = n$.

c. Montrer que P_0 est impair (*i.e.* $P(-X) = -P(X)$).

d. On pose $P_0 = \sum\limits_{k=0}^{p} \alpha_k X^{2k+1}$. Trouver une relation de récurrence qui permet de déterminer successivement $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$. En déduire α_k en fonction de k.

(*Réponse:* $\alpha_k = 2^{2k} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} \dfrac{C_p^k}{C_{2k}^k}$).

e. En posant $P_0 = \sum\limits_{k=0}^{2p+1} \beta_k (X-1)^k (X+1)^{2p+1-k}$. Déterminer $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2p+1}$. (On pourrait commencer par exprimer 1 sur la base $\mathcal{F}$ en écrivant $2 = (X+1)-(X-1)$).

f. En déduire l'identité:

$$\left(\frac{X+1}{2}\right)^{2p+1}\sum_{k=0}^{2p+1}\frac{C_{2p+1}^{k}}{2p+1-2k}\left(\frac{1-X}{1+X}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{C_p^k}{C_{2k}^k}2^{2k}X^{2k+1}$$

4°. Intégrer, sur $]-1,1[$, l'équation différentielle

$$(2p+1)xy+(1-x^2)y'=1.$$

En déduire une expression de $P_0(x)$, $(x\in]-1,1[)$ contenant une intégrale.

5°. Utiliser ce qui précède pour calculer

$$\int_0^{\theta}\frac{dt}{(\cos t)^{2p+2}}\qquad\text{pour}\qquad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

**Institut Supérieur des Sciences Appliquées
et de Technologie**

**Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année**

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

I

1°. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire la valeur de I_n.

2°. Soit l'équation différentielle

$$(1-x)y' - \lambda y = 0 \qquad (1)$$

y une fonction inconnue de la variable réelle x et $\lambda \in \mathbb{R}$.

a. Déterminer les solutions de (1) sur $]-\infty, 1[$.

b. Pour quelle valeur de λ les solutions ainsi définies sont elles des polynômes de degrée n ? Ces polynômes sont-ils alors des solutions sur $\mathbb{R}$ de (1) ?

II

Si $P \in E$ on pose $\mathcal{L}(P)(x) = \int_0^{+\infty} P(tx)\, e^{-t}\, dt$.

1°. Calculer $\mathcal{L}(X^n)$, ($n \in \mathbb{N}$).

2°. Montrer que $\mathcal{L}$ est un endomorphisme de E. Donner Ker $\mathcal{L}$.

3°. Soit $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Montrer qu'il existe un unique P, que l'on demande de déterminer, tel que $\mathcal{L}(P) = Q$.

4°. Soit $P \in E$. Comparer les polynômes:

a. $X(\mathcal{L}(P))'$ et $\mathcal{L}(XP')$.

b. $(\mathcal{L}(P))'$ et $\mathcal{L}((XP')')$. (On Pourrait commencer par étudier le cas $P = X^n$).

III

Si $P \in E$ on pose $\mathcal{D}(P) = XP'' + (1-X)P'$.

1°. Montrer que $\mathcal{D}$ est un endomorphisme de E.

2°. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère l'équation

$$\mathcal{D}(P) = \lambda P \tag{2}$$

où P est un élément inconnu de E.

a. Montrer que si P est une solution de (2), $\mathcal{L}(P)$ est une solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

b. Pour quelles valeurs de λ, (2) a-t-elle des solutions dans E ?

3°. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer qu'il existe un polynôme L_n et un seul vérifiant

$$\mathcal{D}(L_n) + nL_n = 0, \qquad L_n(0) = 1$$

Préciser les expressions de $\mathcal{L}(L_n)$ et de L_n.

b. Montrer que $L_n(x) = \dfrac{1}{n!}\, e^x \left(x^n e^{-x}\right)^{(n)}$.

IV

Si $(P,Q) \in E \times E$ on pose

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t).Q(t)\, e^{-t}\, dt.$$

1°. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2°. *a.* Calculer la dérivée de $x \mapsto xe^{-x}P'(x)$. En déduire une expression nouvelle de $\mathcal{D}(P)$.

b. Montrer que pour $(P,Q) \in E \times E$ on a $\langle \mathcal{D}(P), Q\rangle = \langle P, \mathcal{D}(Q)\rangle$.

c. En déduire la valeur de $\langle L_p, L_q\rangle$ pour $p \neq q$.

3°. On note $f_{n,k}(x) = \left(x^n e^{-x}\right)^{(n-k)}$ pour $0 < k \leq n$.

a. Montrer que $f_{n,k}(0) = \lim\limits_{x\to\infty} f_{n,k}(x) = 0$.

b. En déduire par récurrence sur k que

$$\langle L_n, Q\rangle = \frac{(-1)^k}{n!} \int_0^{+\infty} f_{n,k}(t)\, Q^{(k)}(t)\, dt$$

et puis que

$$\langle L_n, Q\rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \langle X^n, Q^{(n)}\rangle$$

où Q est un élément quelconque de E.

4°. Utiliser ce qui précède pour calculer $\langle L_n, L_n\rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

V

Dans cette partie n est un entier ≥ 1 fixé.

1°. Montrer qu'il existe des réels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ tels que

$$XL_n = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k L_k$$

2°. Montrer que, si $k < n-1$ alors $\alpha_k = 0$.

3°. Calculer α_{n+1} et α_{n-1}.

4°. Calculer α_n en donnant à x une valeur particulière.

5°. En déduire une relation de récurrence permettant d'exprimer L_{n+1} en fonction de L_n et L_{n-1}.

Institut Supérieur des Sciences Appliquées et de Technologie

Devoir surveillé de Mathématiques
Deuxième Année

Exercice .1 Soient E et F deux ensembles.Montrer que $f : E \to F$ est injective si, et seulement si, $\forall (X,Y) \in E^2, \quad f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

Exercice .2 On appelle application croissante de l'ensemble ordonné $(E, \leq_E)$ dans l'ensemble ordonné $(F, \leq_F)$, toute application $f : E \to F$ telle que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad x \leq_E y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq_F f(y)$$

Si f est bijective croissante f^{-1} est elle une application croissante ? Justifier.

Exercice .3 *Théorèmre de Cantor-Bernstien*

Soient E et F deux ensembles tels qu'il existe une injection $f : E \to F$ et une injection $g : F \to E$. On veut montrer qu'il existe une bijection $\varphi : E \to F$.

On considère $h : E \to E$ définie par $h = g \circ f$, et on pose $G = E \setminus g(F)$. On appelle $\mathcal{F}$, le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ constitué des parties X de E telles que $G \cup h(X) \subset X$.

1°. Montrer que $\mathcal{F}$ est non vide et stable par intersection quelconque (i.e. si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{F}$, alors $\bigcap_{i \in I} X_i \in \mathcal{F}$).

2°. Montrer que si $X \in \mathcal{F}$, alors $G \cup h(X) \in \mathcal{F}$.

3°. On pose $A = \bigcap_{X \in \mathcal{F}} X$, $B = E \setminus A$, $A' = f(A)$, et $B' = g^{-1}(B)$. Montrer que:

$$A' \cap B' = \emptyset, \qquad \text{et que} \qquad A' \cup B' = F$$

On pourra considérer l'image d'un élément de F par g.

4°. Montrer que l'application $\varphi : E \to F$ définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour} \quad x \in A \\ g^{-1}(x) & \text{pour} \quad x \in B \end{cases}$$

est une bijection.

Exercice .4 On définit la relation suivante sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$:

$$\forall A, B \subset \mathbb{N}, \quad A \sim B \iff \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijective telle que } \varphi(A) = B.$$

1°. *a.* Démonter que $\sim$ est une relation d'équivalence.

b. Prouver que :

$$A \sim B \iff \bar{A} \sim \bar{B} \qquad \text{où } (\bar{A} = \mathbb{N} \setminus A).$$

c. Prouver que :

$$A \sim B \iff A \text{ et } \bar{A} \text{ sont respectivement équipotent à } B \text{ et } \bar{B}.$$

2°. Soit $A \subset \mathbb{N}$, et $\widetilde{A}$ la classe d'équivalence de A.

a. Si A est fini de cardinal n, montrer que $\widetilde{A} = \{B \subset \mathbb{N};\ \text{Card } (B) = n\}$.

b. Si A est infinie et $\widetilde{A}$ fini, décrire $\widetilde{A}$.

c. Si $A, \widetilde{A}, B, \widetilde{B}$ sont infinis, montrer que $A \sim B$.

3°. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble quotient $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim$, et on d'éfinit une relation sur $\mathcal{E}$:

$$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{E}, \quad \mathcal{A} \leq \mathcal{B} \iff \exists A \in \mathcal{A} \text{ et } B \in \mathcal{B} \text{ telles que } A \subset B.$$

a. Démontrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{E}$. Pour l'antisymétrie vous pouvez utiliser le théorème de Cantor-Bernstein.

b. Démontrer que l'ordre est total.

c. $\mathcal{E}$ a-t-il la propriété de la borne supérieure ?