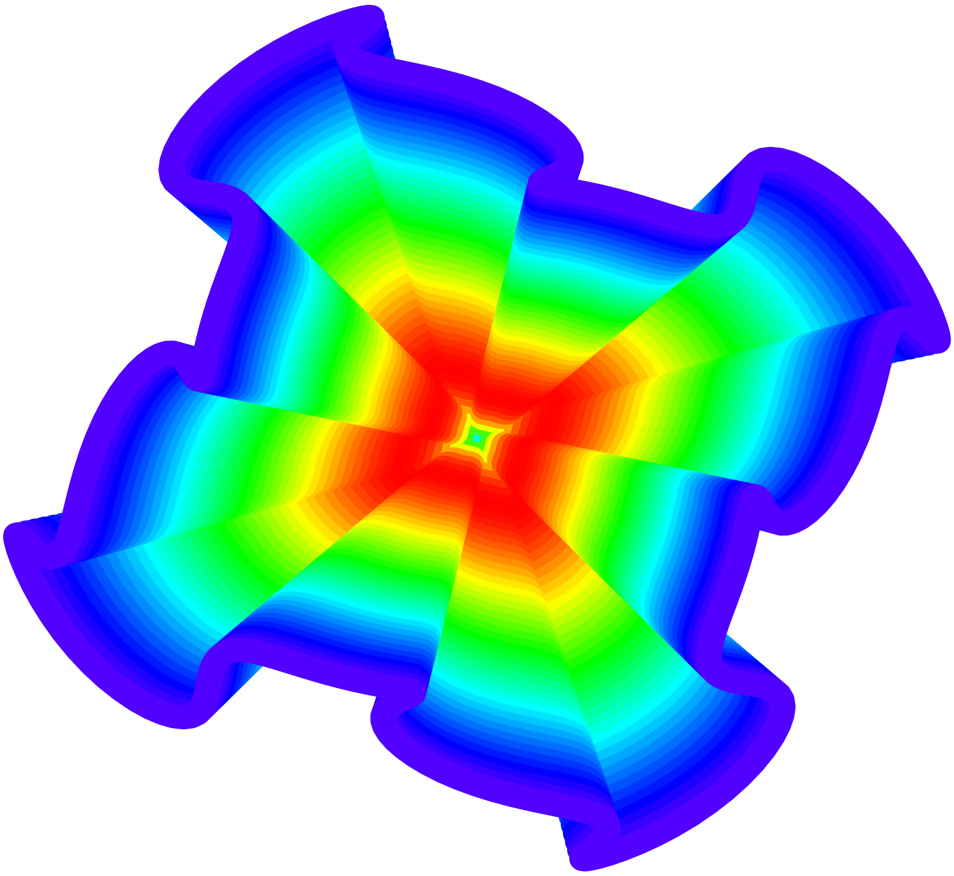
Problèmes de Mathématiques

42 sujets non résolus



OMRAN KOUBA

le 2 Janvier 2004

Introduction

Dans ce recueil de problèmes non corrigés nous avons l'ambition de donner à nos étudiants un ouvrage qui leur permet de consolider et de préciser leurs connaissances.
Les sujets sont variés et choisis pour couvrir une majeure partie des programmes de mathématiques en premier cycle à l'ISSAT.

Omran KOUBA
le 2 Janvier 2004

Résumés des sujets

Sujet.1 1

Nombres de Stirling, Application: Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\infty} k^n \left(\frac{m}{m+1}\right)^k$, est un entier.

Sujet.2 4

1°. Si G est une fraction rationnelle de degré inférieure ou égal à -2, et ayant ses pôles dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(t)\,dt = 2\pi i \left(\sum_{\lambda \in \mathcal{P}^+} \operatorname{Res}(G, \lambda) \right).$$

où $\mathcal{P}^+$ est l'ensemble des pôles de G de partie imaginaire strictement positive.

2°. W un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$. On étudie les couples $(f, g) \in \mathcal{L}(W)$ vérifiant $fg - gf = f$.

Sujet.3 7

Inégalités de Hölder et de Minkowski. Normes Matricielles, Norme d'opérateur de la matrice de Hilbert.

Sujet.4 9

Polynômes de Tchebytchev.

Sujet.5 12

La fonction Γ. Formule d'Euler, formule des Complèments, et formule de dédoublement.

Sujet.6 15

Polynômes de Bernoulli. Séries de Fourier. Développement en série entière de $z \mapsto \operatorname{tg} z$. Formule d'Euler-Maclaurin.

Sujet.7 19

1°. la somme de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n}$.

2°. Etude du noyau de Poisson.

3°. Développement en série entière de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}(1+\sqrt{1-t})^n}$ au voisinage de 0.

Sujet.8 22

Etude du Problème différentiel:

$$\begin{cases} Z'' + k^2 \sin Z = 0. \\ \\ Z(0) = a ; Z'(0) = 0. \end{cases}$$

Sujet.9 25

Etude de $T : C([0,1]) \longrightarrow C([0:1]) : f \mapsto g$ où:

$$g(x) = (\operatorname{Log} x) \int_0^x f(t)\,dt + \int_x^1 (\operatorname{Log} t) f(t)\,dt.$$

Sujet.10 28

Fonctions de Bessel, et leurs zéros.

Sujet.11 31

Soit $g :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x^{1-\lambda}(1-x)^{\lambda}}$. ($\lambda \in]0,1[$). On se propose de déterminer une suite de fonctions rationnelles convergeant uniformément vers g sur tout compact de $]1, +\infty[$.

Sujet.12 35

On étudie dans ce problème les couples (F_n, G_n), (pour $n \in \mathbb{N}^*$), vérifiant:

$$(1-X)^n F_n + X^n G_n = 1 \quad \text{et} \quad (F_n, G_n) \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^2 \qquad (\mathcal{E}_n)$$

Sujet.13 38

1°. Calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_{n+2}F_n}$ et de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{n+2}F_n}$, où $(F_n)_{n\geq 1}$ est la suite de Fibonacci.

2°. Calcul de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$.

3°. Diagonalisation de la matrice réelle $A = (a_{ij})$ d'ordre n définie par $a_{ij} = 1$ si $|i-j| = 1$ et $a_{ij} = 0$ si $|i-j| \neq 1$.

Sujet.14 41

L'exitence dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ d'une base formée de matrices qui sont les matrices de symétries par rapport à un plan.

SUJET.15 43

1°. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\operatorname{Log} x}\,dx = \operatorname{Log} 2.$

2°. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier positif $k(n)$, et un seul, vérifiant l'inégalité: $2^{k(n)} \leq n < 2^{k(n)+1}$, on pose alors $L(n) = 2^{k(n)}$, et si l'ecriture en base 2 de n est $n = \displaystyle\sum_{k\geq 1} \varepsilon_k 2^{k-1}$ alors on note $S(n) = \displaystyle\sum_{k\geq 1} \varepsilon_k$ c'est à dire la somme des chiffres de n dans son écriture binaire. On se propose d'étudier, pour $\alpha > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(L(n))^\alpha S(n)}$ et de calculer sa somme $T(\alpha)$ lorsqu'elle converge.

3°. On se propose de démontrer qu'il existe une, et une seule, fonction dérivable sur $[0,1]$ telle que

$$f(0) = 1, \qquad \text{et } \forall x \in [0,1], \quad f'(x) = f(x - x^2).$$

SUJET.16 46

Une famille orthogonale de $C([0,1])$ muni du produit scalair: $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t).g(t)\,dt.$

SUJET.17 48

Polynômes de Laguerre.

SUJET.18 51

La fonction Γ, caractérisation, forme intégrale, et formule d'Euler.

SUJET.19 54

I. Étude de la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2}.$$

II. Etude des endomorphismes representś par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

III. Comparaison de deux normes sur un espace vectoriel de dimension infinie.

Sujet.20 57

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction J, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par la relation:

$$J(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin\theta)\, d\theta.$$

Sujet.21 60

I. Étude de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2(n+1)^2}.$$

II. Étude de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $f(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} \varphi(t,u)\, du$, où φ est la fonction définie dans $\mathbb{R}^2$ par:

$$\varphi(t,u) = \frac{\sin(tu)}{u(1+u^4)}.$$

III. Développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie par

$$\forall\, x \in [-\pi, \pi[, \quad f(x) = \frac{\cos(ax)}{\sin(\pi a)} + \frac{\operatorname{ch}(ax)}{\operatorname{sh}(\pi a)}.$$

où $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Sujet.22 62

Étude de la transformation intégrale

$$T(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}} \int_0^x \frac{f(\lambda)}{\sqrt{u(\lambda)}}\, d\lambda$$

où u est une fonction polynôme réelle, de degré $p > 1$, de terme de plus haut degré x^p et sans zéro réel. Et résolution de $f + Tf = g$ dans certains cas.

Sujet.23 65

Le but du problème est de démontrer que le problème différentiel suivant

$$\mathcal{P} : \quad \begin{cases} y'' + y & = \dfrac{1}{t}, \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_+^* \\ \lim\limits_{t \to +\infty} y(t) & = 0. \end{cases}$$

admet une, et une seule, solution que nous allons noter φ. Nous dennerons deux expressions de φ et nous étudirons le comportement de φ et de φ' au voisinage de 0^+.

Sujet.24 69

Approximation rationnelle de la fonction exponentielle.

Sujet.25 71

1°. Diagonalisation d'une matrice.

2°. Non existence de $A \in \mathcal{M}_{2p+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I = 0$.

3°. Calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Log}\left|1 + x^2 - 2x^3\right|}{x^2}\, dx$.

4°. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n^\alpha}$.

Sujet.26 73

Série de Fourier. Fonction Γ et formule des compléments.

Sujet.27 76

1°. Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Log}(1 - 2x\cos a + x^2)}{x}\, dx$.

2°. Développement en série entière de $z \mapsto \operatorname{tg} z$.

Sujet.28 79

Étude de certaines solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre $y'' = xy$.

Sujet.29 82

1°. Enveloppe d'une famille de droites.

2°. Un système différentiel linéaire.

3°. Intégration d'une forme différentielle du premier degré sur une courbe fermée. Calcul pour $x \geq 0$, de

$$\int_0^\infty e^{-xt^2}\cos(t^2)\, dt, \quad \text{et de} \quad \int_0^\infty e^{-xt^2}\sin(t^2)\, dt.$$

Sujet.30 84

L'objet du problème est l'étude des valeurs propres et des vecteurs propres d'un opérateur différentiel considéré d'abord dans un espace de polynômes puis dans certains espaces de fonctions.

SUJET.31 86

L'objet de ce problème est l'étude des suites de polynômes à coefficients réels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant aux trois conditions (C) suivantes:

$$(C) : \left\{ \begin{array}{ll} 1°. & P_0(X) = 1. \\ 2°. & P_1(X) \text{ n'est pas le polynôme nul.} \\ 3°. & \text{Pour tout entier naturel } n, \;\; P_n(X+Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_k(X)P_{n-k}(Y). \end{array} \right\}$$

SUJET.32 90

Pour n un entier naturel supérier ou égal à 2, nous considérons $\omega_n = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$, et nous définissons la matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes, $F_n = (a_{\ell k})$, par $a_{\ell k} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\omega_n^{(\ell-1)(k-1)}$.

Le but du problème est l'étude de quelques propriétés de cette matrice.

SUJET.33 92

Le but du problème est l'étude de quelques propriétés de l'espace vectoriel des suites complexes périodiques, et de certains opérateurs sur cet espace.

SUJET.34 96

On se propose dans ce problème d'étudier l'evolution de la temperature d'une barre métalique dont les extremités sont maintenues à une temperature constante, par la méthode des séries de Fourier.

SUJET.35 99

Quatre exercices independants: Séries numérique, questionnaire vrai ou faux sur la réduction des endomorphismes, diagonalisation simultanée.

SUJET.36 103

Deux Problèmes: – Normes matricielles subordonnées aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$. – Réduction des endomorphismes antisymetriques.

SUJET.37 106

Deux Problèmes: – Enveloppe d'une famille de droites. – Étude de la fonction Γ.

SUJET.38 109

Sur les polynômes de Laguerre.

SUJET.39 112

– Calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{\operatorname{Log} t} dt$. – Étude de l'indépendence linéaire d'un système de polynômes.
– Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Log}(1-x)}{x}\, dx = -\frac{\pi^2}{6}$.

SUJET.40 115

Deux exercices sur le calcul de la transformée de Laplace, et de Fourier de certaines fonctions.

SUJET.41 116

Deux exercices, le premier port sur la transformée de Fourier d'une distributions, et le deuxième utilise la théorie des fonctions holomorphes pour le calcul des intégrales : $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x^k\, dx$, et $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin x^k\, dx$.

SUJET.42 118

Trois exercices, les deux premiers portent sur les distributions, et le troisième utilise la théorie des fonctions holomorphes pour le calcul de l'intégrale : $I(p) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}\, dx$.

Problème de Mathématiques

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $1 \leq k \leq n$, on définit $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ par

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} &= 1, \qquad \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = n! \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} &= k\left(\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \right), \quad (n \geq 2, \quad 1 < k < n) \end{aligned}$$

I

1°. Donner les valeurs de $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ pour $n \leq 5$ et $1 \leq k \leq n$. On présentera les valeurs dans un tableau avec k comme numéro de colonne et n comme numéro de ligne.

2°. Soit $F\ :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n ($n \geq 1$). On pose pour $t > 0$, $g(t) = F(e^t)$. Montrer, pour $t > 0$ et $n \geq 1$, que

$$g^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} F^{(k)}(e^t)\, e^{kt}. \tag{1}$$

3°. Montrer que pour $p \in \{1, \dots, n\}$

$$p^n = \sum_{k=1}^{p} C_p^k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}.$$

(On pourrait considérer $F(x) = x^p$ dans 2°..)

4°. En déduire que pour tout polynôme Q de degré $\leq n$ l'on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^n}{k!} Q^{(k)}(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} Q^{(k)}(1)$$

(On vérifie cela pour $Q = X^p$ $(p = 0, 1, \dots, n)$ et on montre que cela suffit).

5°. Soit $p \in \{1, \dots, n\}$. Trouver $\widetilde{Q} \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n, tel que $\widetilde{Q}^{(p)}(1) = 1$ et $\widetilde{Q}^{(k)}(1) = 0$ si $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{p\}$.

6°. En déduire que

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right\} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k\, k^n \tag{2}$$

7°. Utiliser (1) pour montrer que , pour $t > 0$ et $n \geq 1$, l'on a

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{e^{-t}}{(1-e^{-t})^{k+1}} \\ \frac{d^n}{dt^n}\left(\exp(e^t)\right) &= \exp(e^t)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left\{ {n \atop k} \right\} e^{kt} \end{aligned} \tag{3}$$

II

Soient $t > 0$, et $n \in \mathbb{N}$.

1°. Montrer que les séries $\sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!}\, e^{kt}$ et $\sum_{k \geq 0} k^n\, e^{-kt}$ sont convergentes. On pose

$$g_n(t) = \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!}\, e^{kt}, \quad h_n(t) = \sum_{k \geq 0} k^n\, e^{-kt}.$$

2°. Exprimer $g_0(t)$ en fonction de $\exp(e^t)$, et $h_0(t)$ en fonction de $e^{-t}/(1-e^{-t})$.

3°. Montrer l'inégalité: $\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad |e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2}\, e^{|x|}$.

4°. Soient $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et $\ell \in]-t_0/2, t_0/2[$. Montrer

$$\begin{aligned} |g_n(t_0+\ell) - g_n(t_0) - \ell g_{n+1}(t_0)| &\leq \frac{\ell^2}{2}\, g_{n+2}(3t_0/2) \\ |h_n(t_0+\ell) - h_n(t_0) + \ell h_{n+1}(t_0)| &\leq \frac{\ell^2}{2}\, h_{n+2}(t_0/2) \end{aligned}$$

5°. En déduire que, pour tout n, h_n (resp. g_n) est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $g_n' = g_{n+1}$, et $h_n' = -h_{n+1}$.

6°. Conclure que pour $n \geq 1$ et $t > 0$

$$\begin{aligned} g_n(t) &= \exp(e^t)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left\{ {n \atop k} \right\} e^{kt} \\ h_n(t) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\left\{ {n \atop k} \right\}\frac{e^{-t}}{(1-e^{-t})^{k+1}} \end{aligned}$$

7°. Montrer que, $\forall\, n \geq 0$, et $\forall\, x > 1$, $e^{-x}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}\, x^k\right)$ est une fonction polynômiale $G_n(x)$ qu'on demande d'expliciter.

8°. Montrer que, $\forall\, n \geq 0$, et $\forall\, x \geq 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} k^n \left(1 - \frac{1}{x}\right)^k$ est une fonction polynômiale $H_n(x)$ qu'on demande d'expliciter. Montrer que $X(X-1)$ divise $H_n(X)$ pour $n \geq 1$.

9°. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n \left(\frac{m}{m+1}\right)^k, \qquad \text{est un entier pair.}$$

10°. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$.

11°. Exprimer

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} C_n^k H_k(X), \qquad \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k H_k(X)$$

en fonction de $H_n(X)$.

III

1°. Montrer que si $p \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ alors

$$|z| < \frac{1}{p} \Longrightarrow \frac{1}{1-pz} = \sum_{n=0}^{\infty} p^n z^n.$$

2°. Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$\frac{1}{\prod\limits_{p=1}^{k}(1-pz)} = \frac{1}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-kz)}.$$

3°. Utiliser ce qui précède pour montrer que, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1/k$, l'on a

$$\frac{1}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-kz)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\{ {k+r \atop k} \right\} z^r \tag{4}$$

IV

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p \leq n$ on note S_p^n le nombre des surjections d'un ensenble à n éléments sur un ensemble à p éléments.

Montrer que $\left\{ {n \atop p} \right\} = S_p^n$. Dire pourquoi $p!$ divise $\left\{ {n \atop p} \right\}$.(On pourrait commencer par calculer de deux manières le nombre des applications d'un ensenble à n éléments dans un ensemble à p éléments).

$\mathcal{FIN}$

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

Problème I

1°. Soit $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On note $I_k(\lambda, x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{dt}{(t-\lambda)^k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$.
Montrer que $I_k(\lambda) = \lim\limits_{x \to \infty} I_k(\lambda, x)$ existe, et la calculer en fonction de λ.

2°. Soit $G(X)$ une fraction rationnelle ayant ses pôles dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et telle que le degré de G vérifie $\deg G(X) \leq -2$.

a. Montrer que $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} G(t)\,dt$ converge et que $I = \lim\limits_{x\to\infty} \displaystyle\int_{-x}^{x} G(t)\,dt$.

b. Si λ est un pôle de G nous rappelons que $\mathrm{Res}\ (G, \lambda)$ est le coefficient de $\dfrac{1}{X-\lambda}$ dans la décomposition de G en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$. et on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de G, $\mathcal{P}^+$ (resp. $\mathcal{P}^-$) l'ensemble des pôles λ de G tels que $\mathrm{Im}\ (\lambda) > 0$, (resp. $\mathrm{Im}\ (\lambda) < 0$).

b.i Montrer que $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathrm{Res}\ (G, \lambda) = 0$.

b.ii Utiliser la décomposition en éléments simples de G et 1°. pour montrer que

$$I = i\pi \left(\sum_{\lambda \in \mathcal{P}^+} \mathrm{Res}\ (G, \lambda) - \sum_{\lambda \in \mathcal{P}^-} \mathrm{Res}\ (G, \lambda) \right).$$

b.iii Déduire la valeur de I en fonction de $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathcal{P}^+} \mathrm{Res}\ (G, \lambda)$.

3°. *Application:* Montrer que si $0 \leq m < n$ alors

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{2n \sin\left(\dfrac{2m+1}{2n}\pi\right)}.$$

PROBLÈME II

Les deux parties sont indépendantes

Première Partie

Dans cette partie $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$; l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes. On fixe dans V la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1 = E_{11}, e_2 = E_{12}, e_3 = E_{21}, e_4 = E_{22}\}$ où E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i et la colonne j qui vaut 1.

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, on note $\tau = \operatorname{tr}(A)$, $\delta = \det(A)$, et on considère

$$\varphi : V \longrightarrow V : M \mapsto MA - AM.$$

1°. Écrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{E}$. En déduire le polynôme caractéristique χ_φ de φ. (On exprimera le résultat en fonction de τ et δ.)

2°. On suppose que $\tau^2 - 4\delta \neq 0$.

a. Montrer que φ admet deux valeurs propres non nulles.

b. En déduire que dim Ker $\varphi = 2$, et donner une base de Ker φ.

c. Montrer que φ est diagonalisable.

3°. Donner un exemple de matrice A pour laquelle l'application φ correspondante n'est pas diagonalisable.

4°. Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur τ et δ), pour qu'il existe $M \in V \setminus \{0\}$, telle que $MA - AM = M$.

5°. On suppose qu'il existe $M \in V \setminus \{0\}$, telle que $MA - AM = M$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et une matrice inversible P tels que

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix}, \qquad PMP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deuxième Partie

Soit W un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$, et soient f, g deux éléments de $\mathcal{L}(W)$ tels que $fg - gf = f$.

1°. Montrer que $f^k g - g f^k$ s'exprime simplement en fonction de f^k.

2°. On pose $p = \max \big\{k, \text{tel que la suite } \{I, f, \ldots, f^{k-1}\} \text{ soit libre}\big\}$.

a. Montrer que $p \leq n$.

b. Montrer que $f^p = 0$. (On pourrait utiliser 1°.).

c. Soit $x \notin \text{Ker } f^{p-1}$. On pose $y_k = f^{p-k}(x)$, $(k = 1, 2, \ldots, p)$ avec $f^0 = I$. Montrer que $\{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ est libre.

Dans la suite du problème on suppose que dim *Ker* $f = 1$.

3°. On note $F_k = \text{ Ker } f^k$, $(k = 0, 2, \ldots, p)$.

a. Montrer que pour $k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $F_k \subset F_{k+1}$, et $f(F_{k+1}) \subset F_k$.

b. En considérant $h : F_{k+1} \longrightarrow F_k : x \mapsto f(x)$, montrer que

$$\dim F_{k+1} \leq \dim F_k + 1, \qquad \text{pour } k = 0, 1, \ldots, p-1.$$

c. En déduire que $p = n$ et que pour tout k, $\dim F_k = k$.

d. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ de W telle que $f(b_1) = 0$, $f(b_i) = b_{i-1}$ pour $i = 2, \ldots, n$.

e. Montrer que $F_k = \text{ vect } \{b_1, \ldots, b_k\}$ et que $F_k = f(F_{k+1})$.

f. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $g(b_1) = \lambda b_1$.(On pourrait calculer $f(g(b_1))$)

g. Montrer que $\quad \forall\, k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \exists x_k \in F_{k-1} \quad : g(b_k) = (\lambda + k - 1)b_k + x_k$.

h. En déduire que g est diagonalisable, et qu'il existe une base $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de W telle que, si $\lambda_k = \lambda + k - 1$, on ait

$$\text{Mat }(g, \mathcal{E}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \text{Mat }(f, \mathcal{E}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{FIN}$

OMRAN KOUBA

Problème de Mathématiques

I

1°. Montrer, en utilisant la concavité de la fonction Log, que pour tout $t \in]0,1[$ et tout $(u,v) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ on a

$$u^t v^{1-t} \leq tu + (1-t)v.$$

2°. Montrer que pour $a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n$ des réels positifs, et $t \in]0,1[$ l'on a

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{1/t}\right)^t \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{1/(1-t)}\right)^{1-t}. \qquad \textit{Inégalité de Hölder}$$

3°. En Utilisant 2°., montrer que l'on a aussi

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^{1/t}\right)^t \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^{1/t}\right)^t + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{1/t}\right)^t. \qquad \textit{Inégalité de Minkowski}$$

4°. *Application:* $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $p \in [1, +\infty[$, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Montrer que $\|.\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$. On appelle $\ell_n^p(\mathbb{K})$ l'e.v.n $(\mathbb{K}^n, \|.\|_p)$.

II

On identifie les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ canoniquement aux matrices carrées d'ordre n. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. on peut alors munir $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme des applications linéaires ;

$$\|A\|' = \sup \{\|Ax\| \ | \ x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|x\| \leq 1\}$$

une telle norme est dite une norme matricielle subordonnée à la norme $\|.\|$.

1°. Montrer que si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\|A\|_1' = \sup_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right), \quad \|A\|_\infty' = \sup_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right).$$

2°. On admet le résultat suivant: *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique alors il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D telles que $A = Q^{-1}DQ$.* Montrer que

– Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors

$$\|A\|_2' = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ est une valeur propre de } A\}.$$

– Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors

$$\|A\|_2' = \sqrt{\|{}^tA.A\|_2'} = \left\|{}^tA\right\|_2'.$$

3° Une inégalité reliant $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$,$\|\cdot\|_\infty$.

a. Montrer que si $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ sont des nombres positifs, alors

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j b_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j\right)\left(\sum_{j=1}^n a_j b_j^2\right).$$

b. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a

$$\left|\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right|^2 \leq \|A\|_\infty' \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\,|x_j|^2\right).$$

c. En déduire que $\|A\|_2' \leq \sqrt{\|A\|_1'\,\|A\|_\infty'}$.

d. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 16 & 9 & 22 & 15 \\ 20 & 8 & 21 & 14 & 2 \\ 7 & 25 & 13 & 1 & 19 \\ 24 & 12 & 5 & 18 & 6 \\ 11 & 4 & 17 & 10 & 23 \end{bmatrix}$$

calculer $\|A\|_1'$, $\|A\|_\infty'$, utiliser ensuite 3°.*c* pour trouver $\|A\|_2'$.

4°. La norme de la matrice de Hilbert.

a. Montrer que pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on successivement les propriétés suivantes:

◇ $\displaystyle\int_{-1}^1 P(x)\,dx + i\int_0^\pi P(e^{i\theta})\,e^{i\theta}\,d\theta = 0.$

◇ $\displaystyle\int_{-1}^1 P^2(x)\,dx + i\int_0^\pi P^2(e^{i\theta})\,e^{i\theta}\,d\theta = 0.$

◇ $\displaystyle\int_0^1 P^2(x)\,dx \leq 1/2\int_{-\pi}^\pi \left|P(e^{i\theta})\right|^2\,d\theta.$

b. Déduire que si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ on a

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{a_i a_j}{i+j-1} \leq \pi\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right).$$

c. Soit $H_n = (h_{ij})$ la matrice de Hilbert d'ordre n définie par $h_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$. Montrer que $\|H_n\|_2' \leq \pi$.

$\mathcal{FIN}$

OMRAN KOUBA

Problème de Mathématiques

Dans ce problème E désigne $C([-1,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1,1]$ à valeurs réelles, $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}_n$) le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômiales (resp. de degré inférieur ou égal à n).

Si $(f,g) \in E \times E$ on note $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$.

Enfin, on considère la suite de polynômes $\{T_n\}_{n\geq 0}$ définie par

$$T_0 = 1,\ T_1 = X, \quad T_n(X) = 2XT_{n-1}(X) - T_{n-2}(X) \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Préliminaires

1°. Dire pourquoi l'intégrale définissant $\langle f, g\rangle$ converge. Montrer ensuite que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E. On note alors $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.

2°. Montrer que $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{\pi} f(\cos\theta)g(\cos\theta)\, d\theta$.

3°. Calculer $I(n,m) = \displaystyle\int_0^{\pi} (\cos n\theta)(\cos m\theta)\, d\theta$. (On distinguera entre les cas $m \neq n$, $m = n \neq 0$ et $m = n = 0$.)

Première Partie

1°. Montrer que $\deg T_n = n$. Calculer le coefficient de X^n dans T_n pour $n \geq 1$.

2°. Expliciter T_2 et T_3.

3°. Calculer $T_n(\cos\theta)$ en fonction de $\cos n\theta$ et $T_n(\operatorname{ch} x)$ en fonction de $\operatorname{ch} nx$.

4°. Montrer que $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$|x| > 1 \iff |T_n(x)| > 1.$$

5°. Montrer que T_n admet n racines réelles distinctes dans $]-1,1[$.

6°. Calculer $\langle T_n, T_m\rangle$. En déduire une base orthonormale de $\mathcal{P}_n$.

Deuxième Partie

On considère l'application linéaire

$$\phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} : P \mapsto (X^2 - 1)P''(X) + XP'(X).$$

1°. Montrer que $\phi(\mathcal{P}_n) \subset \mathcal{P}_n$.

On considère alors $\phi_n : \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{P}_n : P \mapsto \phi(P)$.

2°. Écrire la matrice de ϕ_n dans la base canonique $\{1, X, \dots, X^n\}$ de $\mathcal{P}_n$.

3°. Montrer que ϕ_n est diagonalisable.

4°. En déduire qu'il existe un seul polynôme $P_n \in \mathcal{P}_n$ vérifiant $\phi(P_n) = n^2 P_n$ et dont le coefficient dominant vaut 1. Quel est le degré de P_n ?

5°. Calculer la dérivée de $\sqrt{1-x^2}P'(x)$ pour $x \in]-1, 1[$. En déduire

$$\forall\, (P, Q) \in \mathcal{P}^2, \qquad \langle \phi(P), Q\rangle = \langle P, \phi(Q)\rangle.$$

6°. En déduire que si $n \neq m$ on a $\langle P_n, P_m\rangle = 0$.

7°. Montrer que $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \mathcal{P}_{n-1}^{\perp}$.

8°. Déduire que $P_n = \lambda_n T_n$, et calculer λ_n.

9°. Donner une équation différentielle vérifiée par T_n.

Troisième Partie

Soient x_1, x_2 et x_3 les trois racines de T_3 avec $x_1 < x_2 < x_3$.

1°. Montrer qu'il existe un seul triplet $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall\, P \in \mathcal{P}_2, \quad \int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = a_1 P(x_1) + a_2 P(x_2) + a_3 P(x_3) \qquad (*)$$

Déterminer a_1, a_2, a_3.

2°. Montrer que $(*)$ reste valable pour tout $P \in \mathcal{P}_5$.(On pourrait considérer la base $\{1, X, X^2, T_3, XT_3, X^2T_3\}$ de $\mathcal{P}_5$).

3°. Montrer que l'application linéaire

$$\psi : \mathcal{P}_5 \longrightarrow \mathbb{R}^6 : P \mapsto (P(x_1), P(x_2), P(x_3), P'(x_1), P'(x_2), P'(x_3))$$

est bijective.

4°. Soit f une fonction de classe C^6 sur $[-1,1]$.

a. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme Q_f de $\mathcal{P}_5$ tel que

$$Q_f(x_i) = f(x_i), \quad Q'_f(x_i) = f'(x_i) \qquad \text{pour } i = 1,2,3.$$

b. Montrer que la fonction

$$G_f : [-1,1] \setminus \{x_1, x_2, x_3\} \longrightarrow \mathbb{R} : G_f(x) = \frac{f(x) - Q_f(x)}{T_3^2(x)}$$

est prolongeable par continuité sur $[-1,1]$. On note aussi G_f la fonction ainsi prolongée.

c. Soit t fixé dans $[-1,1] \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$, on définit

$$h : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} : h(x) = f(x) - Q_f(x) - AT_3^2(x)$$

où A est une constante déterminée par la condition $h(t) = 0$.

i. Montrer que h est de classe C^6, et calculer $h^{(6)}(x)$.

ii. Calculer $h(x_i)$ et $h'(x_i)$ pour $i = 1,2,3$. En déduire que h' s'annule en 6 points de l'intervalle $]-1,1[$. (On pourrait utiliser le théorème de Rolle après l'avoir énoncé).

iii. Déduire, par application successive du théorème de Rolle, qu'il existe $\eta \in [-1,1]$ tel que $h^{(6)}(\eta) = 0$. En déduire que $G_f(t) = \dfrac{1}{16.6!} f^{(6)}(\eta)$.

iv. Conclure que, pour tout $t \in [-1,1]$, on a

$$\frac{1}{16.6!} \inf_{x\in[-1,1]} f^{(6)}(x) \le G_f(t) \le \frac{1}{16.6!} \sup_{x\in[-1,1]} f^{(6)}(x).$$

5°. Soit

$$L : E \longrightarrow \mathbb{R} : g \mapsto L(g) = \int_{-1}^{1} \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt - \sum_{k=1}^{3} a_k g(x_k).$$

a. Montrer que, pour toute fonction f de classe C^6 sur $[-1,1]$, on a

$$L(f) = L(f - Q_f) = \int_{-1}^{1} G_f(x) \frac{T_3^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

b. Conclure que, pour toute fonction f de classe C^6 sur $[-1,1]$, il existe $\xi \in [-1,1]$ tel que

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt - \sum_{k=1}^{3} a_k f(x_k) = \frac{\pi}{23040} f^{(6)}(\xi).$$

$\mathcal{FIN}$

OMRAN KOUBA

Problème de Mathématiques

I

1°. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ est convergente. On note,alors

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

2°. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Donner la valeur de $\Gamma(n+1)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

3°. On se propose de démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n(x) = \Gamma(x)$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer les deux inégalités suivantes

$$i.\quad \forall\, t \in [0,n], \qquad \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

$$ii.\quad \forall\, t \in [0,n], \qquad e^{-t}\left(1-\frac{t^2}{n}\right) \leq \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\gamma_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$. Montrer que

$$0 \leq \int_0^n t^{x-1}e^{-t}\,dt - \gamma_n(x) \leq \frac{1}{n}\Gamma(x+2).$$

c. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n(x) = \Gamma(x)$.

4°. En effectuant des intégrations par parties, montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)} = \frac{e^{-xt(n)}}{x\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+x/k)\,e^{-\frac{x}{k}}}.$$

où $t(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \operatorname{Log} n.$

5°. Montrer qu'il existe une constante δ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} x e^{x\delta} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-x/k}.$$

6°. Dans cette question on suppose que $x \in]0,1[$. Montrer que

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \lim_{n\to\infty} x \prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{x^2}{k^2}\right).$$

II

1°. Soit f la fonction définie sur la droite réelle $\mathbb{R}$ par l'expression:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$

Préciser l'ensemble de définition de cette fonction. Démontrer que pour tout réel $x \notin \mathbb{Z}$ l'expression $f(\frac{x}{2}) + f(\frac{1-x}{2})$ se calcule en fonction de $f(x)$. Déterminer le développement limité de $x \mapsto x^2 f(x)$ à l'ordre 5 au voisinage de 0.

2°. Soit g la fonction définie par l'expression

$$g(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}.$$

a. Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction g; établir qu'elle est périodique de période 1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0,1[$ l'expression $g(\frac{x}{2}) + g(\frac{1-x}{2})$ se calcule en fonction de $g(x)$.

b. Soit h la fonction définie par l'expression

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}.$$

Démontrer que la fonction h est définie et continue sur tout intervalle fermé $[-a,a]$ où a est un réel tel que $0 < a < 1$.

3°. Soit φ la fonction définie par la relation: $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.

a. Démontrer que la fonction φ se prolonge par continuité en 0; préciser la valeur donnée à $\varphi(0)$. En déduire que cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle fermé $[0,1]$ l'expression $\varphi(\frac{x}{2})+\varphi(\frac{1-x}{2})$ se calcule en fonction de $\varphi(x)$. Exprimer de même $\varphi(1-x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

c. Justifier brièvement l'existence de réel $M = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |\varphi(x)|$. À l'aide des relations établies à la question précédente, démontrer que ce maximum M est nul et que par suite la fonction φ est nulle. En déduire la valeur de la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

4°. Pour $x \in]-1,1[\backslash\{0\}$, on pose

$$\Lambda(x) = \mathrm{Log}\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right).$$

a. Montrer que Λ est prolongeable en une fonction de classe C^2 sur $]-1,1[$, qu'on note encore Λ, et calculer Λ' et Λ''.

b. Démontrer que , pour tout x réel appartenant à $]-1,1[\backslash\{0\}$, l'expression $\dfrac{\pi}{\mathrm{tg}\,(\pi x)} - \dfrac{1}{x}$ est égale à la somme d'une série de fonctions, qui converge uniformément sur tout intervalle $[-a,a]$ où a est un réel tel que $0 < a < 1$. (On pourrait remarquer la relation entre h et Λ'').

c. Démontrer que, pour tout x réel appartenant à $]-1,1[$,

$$\sin \pi x = \lim_{n\to+\infty} \pi x \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right).$$

(On pourrait utiliser la fonction logarithme).

5°. En utilisant la première partie, montrer que

$$\forall x \in]0,1[, \qquad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

6°. Montrer en particulier que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

7°. On pose

$$a_n(x) = 2^x \, \frac{x+2n+1}{2n+1} \, \frac{\gamma_n(\dfrac{x}{2})\gamma_n(\dfrac{1+x}{2})}{\gamma_{2n}(x)}.$$

($\gamma_n(x)$ est défini dans la première partie). Montrer que $a_n(x)$ ne dépend pas de x. En déduire que

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2^{1-x}\sqrt{\pi}\,\Gamma(x).$$

$\mathcal{FIN}$

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

Dans tout le problème $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite de fonctions polynômiales définie par

$$\mathcal{B}\quad \begin{cases} B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - 1/2 \\ B_n(x) = n\left(\int_0^x B_{n-1}(t)\,dt + \int_0^1 tB_{n-1}(t)\,dt\right), \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

La Suite $(B_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ est dite la suite des *polynômes de Bernoulli*. On appelle aussi les *nombres de Bernoulli* la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $b_n = B_n(0)$.

I. Etudes de quelques propriétés des polynômes de Bernoulli.

1°. Montrer que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite de fonctions polynômiales vérifiant

$$\mathcal{B}'\quad \begin{cases} B_0(x) = 1, \\ B_n'(x) = nB_{n-1}(x), \quad (n \geq 1) \\ \int_0^1 B_n(x)\,dx = 0, \qquad (n \geq 1) \end{cases}$$

2°. Montrer les propriétes suivantes:

a. $B_n(X)$ est un polynôme de degré n.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(1 - X) = (-1)^n B_n(X)$.

c. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{p-1} B_n\left(\frac{X+k}{p}\right) = \frac{1}{p^{n-1}} B_n(X).$$

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(X + 1) - B_n(X) = nX^{n-1}$.

e. Pour tout $n \geq 2$ la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie, où l'on appelle $\mathcal{P}_{2n}$ la propriété : "$(-1)^n B_{2n}$ est strictement croissante sur $[0, 1/2]$, strictement décroissante sur $[1/2, 1]$ et admet une racine dans chacun des intervalles $]0, 1/2[$ et $]1/2, 1[$" ; et $\mathcal{P}_{2n+1}$ la propriété : "$(-1)^n B_{2n+1}$ est strictement négative sur $]0, 1/2[$, strictement positive sur $]1/2, 1[$ et admet $\{0, 1/2, 1\}$ comme racines simples dans l'intervalle $[0, 1]$".

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{2n+1} = 0$ et le signe de b_{2n} est $(-1)^{n-1}$.

3°. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in[0,1]} |B_{2n}(x)| = |b_{2n}|$. (On utilisera 2°.*c.* pour estimer $B_{2n}(1/2)$).

4°. Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$B_n(x) = n\left(\int_0^x (t - x + \frac{1}{2})B_{n-1}(t)\,dt + \int_x^1 (t - x - \frac{1}{2})B_{n-1}(t)\,dt\right).$$

En déduire que

$$\frac{2}{n+1}\,|b_{2n+2}| \leq \sup_{x\in[0,1]} |B_{2n+1}(x)| \leq \frac{2n+1}{4}\,|b_{2n}|\,.$$

5°. En utilisant la formule de Taylor, montrer que

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_k X^{n-k}.$$

En déduire que, pour $n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k b_k = 0$.

6°. Conclure que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peuvent être calculés par récurrence par les relations

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_{2n+1} = 0, \quad b_{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2k} b_{2k}, \quad (n \geq 1).$$

Calculer b_n pour $n \leq 10$.

Application: En utilisant 2°.*d.* donner une expression simple de $\sum_{k=1}^{n} k^m$ en fonction de B_{m+1}. Achever les calculs lorsque $m = 5$.

II. Polynômes de Bernoulli et séries de Fourier.

1°. Calculer les coefficients de Fourier exponentiels $\left(c_n(\widetilde{B}_m)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ de la fonction 1-périodique $\widetilde{B}_m$ qui coïncide avec B_m sur $[0,1[$.

2°. Pour $m \geq 1$ et $x \in [0,1]$, calculer les sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^{2m}}, \quad \text{et} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n^{2m-1}}.$$

3°. Déduire que pour $m \geq 1$

$$\frac{2}{(2\pi)^{2m}} \leq \frac{|b_{2m}|}{(2m)!} \leq \frac{4}{(2\pi)^{2m}}.$$

4°. On note $\lambda_m = \frac{1}{m!}\sup_{x\in[0,1]} |B_m(x)|$.Montrer que $\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\lambda_m} = \frac{1}{2\pi}$.

III. Développement en série entière de $\operatorname{tg} z$ et de $z\operatorname{cotg} z$.

Pour $z \in D(0, 2\pi) = \{z \;:\; |z| < 2\pi\}$ et $x \in [0, 1]$, on pose

$$G(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!}\, z^n.$$

1°. Montrer que G est bien définie sur $[0, 1] \times D(0, 2\pi)$.

2°. On fixe $z \in D(0, 2\pi)$.

a. Montrer que $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ existe et la calculer en fonction de G. En déduire qu'il existe $H(z)$ tel que $G(x, z) = H(z)\, e^{xz}$.

b. En intégrant entre 0 et 1 ; Montrer que

$$\forall\, (x, z) \in [0, 1] \times D(0, 2\pi), \qquad G(x, z) = \frac{z e^{xz}}{e^z - 1}.$$

3°. Donner les domaines de validité des formules suivantes

$$z\operatorname{cotg} z = iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1}$$
$$\operatorname{tg} z = \operatorname{cotg} z - 2\operatorname{cotg} 2z.$$

4°. En déduire le développement en série entière des fonctions $z \mapsto \operatorname{tg} z$ et $z \mapsto z\operatorname{cotg} z$ au voisinage de 0.

IV. Formule d'Euler-Maclaurin

1°. Soit f une fonction de classe C^{2n} sur $[0, 1]$, $(n > 1)$. On pose

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!}\, B_k(t) f^{(k)}(t).$$

a. Calculer $\psi'(t)$. En déduire

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}\left(f'(0) + f'(1)\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k)}(0) - f^{(2k)}(1)\right) + R_n.$$

où $R_n = \dfrac{-1}{(2n-1)!} \displaystyle\int_0^1 B_{2n-1}(t) f^{(2n)}(t)\, dt.$

b. Montrer que

$$\begin{aligned}
R_n =& \frac{1}{(2n-1)!}\int_0^{1/2} B_{2n-1}(t)\left(f^{(2n)}(1-t)-f^{(2n)}(t)\right)\,dt\\
|R_n| \leq& \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(B_{2n}(\frac{1}{2})-B_{2n}(0)\right)\sup_{t\in[0,1/2]}\left|f^{(2n)}(1-t)-f^{(2n)}(t)\right|\\
|R_n| \leq& \frac{2\,|b_{2n}|}{(2n)!}\sup_{t\in[0,1/2]}\left|f^{(2n)}(1-t)-f^{(2n)}(t)\right|.
\end{aligned}$$

c. On suppose de plus que $f^{(2n)}$ est monotone sur $[0,1]$, montrer qu'alors

$$|R_n| \leq \frac{2\,|b_{2n}|}{(2n)!}\left|f^{(2n)}(0)-f^{(2n)}(1)\right|.$$

2°. *Application:* On fixe p un entier supérieur ou égal à 2, et on pose

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \operatorname{Log} n - \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{p-1}\frac{b_{2k}}{2k}\,\frac{1}{n^{2k}}.$$

On rappelle que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la constante d'Euler γ.

a. En applicant la formule de la question précédente aux fonctions $f(x) = \operatorname{Log}(x+k)$ et en prenant la somme pour k variant entre n et $m-1$ $(m > n)$, montrer que

$$\forall\,(n,m)\in\mathbb{N}^2,\qquad m > n \geq 1 \implies |\gamma_n - \gamma_m| \leq \frac{|b_{2p}|}{p}\left(\frac{1}{n^{2p}} - \frac{1}{m^{2p}}\right).$$

b. En déduire que

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\qquad n \geq 1 \implies |\gamma_n - \gamma| \leq \frac{|b_{2p}|}{p}\,\frac{1}{n^{2p}}.$$

c. En prenant $p = 5$ donner une valeur approchée de γ à 10^{-8} près.

$\mathcal{FIN}$

OMRAN KOUBA

Problème de Mathématiques

La partie **I** est indépendante des parties **II** et **III**

I

Pour $x \in]-1, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$Q(x, \theta) = \frac{x - \cos\theta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}.$$

Pour $\theta \in]0, 2\pi[$ on note $f_\theta(x) = Q(x, \theta)$.

1°. Montrer que f_θ est développable en série entière au voisinage de zéro, donner ce développement et préciser le rayon de convergence.

2°. En déduire la valeur de l'expression $F_\theta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} x^n$, pour $x \in]-1, 1[$.

3°. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]0, \pi[$, on pose $b_n(\theta) = \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}}$, et si $\alpha \in]0, \pi/2[$ on note I_α l'intervalle $[2\alpha, 2\pi - 2\alpha]$.

a. Calculer $b_n(\theta) - b_{n-1}(\theta)$, $(n \geq 1)$.

b. En déduire qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, qu'on explicitera, telle que

$$\forall\, \theta \in I_\alpha, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}^*, \qquad \left| \sum_{n=1}^{m} \frac{\cos n\theta}{n} + \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{m} a_n b_n(\theta) \right| \leq \frac{1}{2(m+1)\sin\alpha}.$$

c. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n}$ converge uniformément sur tout compact de $]0, 2\pi[$. Donner alors la valeur de sa somme sur $]0, 2\pi[$.

4°. Montrer que, pour $\theta \in]0, 2\pi[$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^2} = -\int_{\pi}^{\theta} \mathrm{Log}\,(2\sin\frac{t}{2})\,dt = -\int_{0}^{\theta} \mathrm{Log}\,(2\sin\frac{t}{2})\,dt.$$

On justifiera l'existence de la dernière intégrale.

II

Pour $x \in]-1,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(x,\theta) = \frac{1-x^2}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}.$$

Et on note $P_x(\theta) = P(x,\theta)$.

1°. Demontrer les propriétés suivantes:

a. Pour $x \in]0,1[$ fixé, on a

$$\begin{aligned} &i. \quad \forall\,\theta, \quad P_x(\theta) \geq 0 \\ &ii. \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_x(\theta)\,d\theta = 1; \\ &iii. \quad \forall\,\delta \in]0,\pi[, \quad \sup_{\delta<|\theta|\leq\pi} P_x(\theta) \leq P_x(\delta). \end{aligned}$$

b. Le coefficient de Fourier exponentiel $c_n(P_x)$ est égal à $x^{|n|}$.(On pourrait développer $x \mapsto P(x,\theta)$ en série entière au voisinage de zéro).

c. Pour $(x,y) \in]-1,1[\times]-1,1[$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(x^2-2x\cos t+1)(y^2-2y\cos(\theta-t)+1)} = \frac{2\pi}{(1-x^2)(1-y^2)}\,\frac{(1-x^2y^2)}{x^2y^2-2xy\cos\theta+1}.$$

d. Il existe une constante $c > 0$ et $\epsilon_0 \in]0,1[$ tels que pour tout $\epsilon \in]0,\epsilon_0]$, on ait $P_{(1-\epsilon)}(\sqrt[3]{\epsilon}) \leq c\sqrt[3]{\epsilon}$.

2°. Dans cette question $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ désigne une fonction 2π-périodique et K-lipschitsienne ; c'est à dire vérifiant $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |g(x)-g(y)| \leq K\,|x-y|$. On note $M = \sup\{|g(t)| : t \in \mathbb{R}\}$.

a. Pour $x \in]0,1[$, écrire la série de Fourier de $P_x * g$ en fonction des coefficients de Fourier exponentiels de g.

b. Montrer que , pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$g(\theta) - P_x * g(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(g(\theta)-g(\theta-t))P_x(t)\,dt.$$

En déduire que, pour tout $\delta \in]0,\pi[$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|g(\theta) - P_x * g(\theta)| \leq K\delta + 2MP_x(\delta).$$

c. En utilisant ce qui précède, montrer qu'au voisinage de 1^-,

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}} |g(\theta) - P_x * g(\theta)| = O(\sqrt[3]{1-x}).$$

III

Pour $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos nt}{1 - x\cos t}\,dt.$$

1°. Montrer que $\varphi : u \mapsto \dfrac{2u}{1+u^2}$ définit un homéomorphisme de $]-1,1[$ sur lui même. Donner une expression algébrique de $\varphi^{-1}(x)$ qui soit valable pour $x = 0$.

2°. Calculer $I_n(\varphi(a))$. En déduire la valeur de $I_n(x)$.

3°. On pose $\lambda(n,k) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi (\cos t)^k \cos nt\,dt$.

a. Montrer que si $k < n$, $\lambda(n,k) = 0$.

b. Montrer que $(\cos t)^k = \displaystyle\sum_{p=0}^{k} \alpha_{p,k}\, e^{i(2p-k)t}$, où $(\alpha_{p,k})_{0\leq p\leq k}$ sont des constantes qu'on demande de déterminer.

c. En déduire la valeur de $\lambda(n,k)$ pour $k \geq n$.(On distingue les cas $k = n \bmod 2$ et $k \neq n \bmod 2$).

4°. Donner le développement en série entière de $I_n(x)$ au voisinage de zéro, quel est son domaine de validité ?

5°. Donner le développement en série entière de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}(1+\sqrt{1-t})^n}$ au voisinage de zéro.

FIN

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

Dans ce problème k désigne un réel strictement positif. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère le problème différentiel $\mathcal{P}_a$:

$$\mathcal{P}_a : \begin{cases} Z'' + k^2 \sin Z = 0 \\ Z(0) = a; \quad Z'(0) = 0. \end{cases}$$

Nous allons démontrer que $\mathcal{P}_a$ admet une solution et une seule notée Z_a, (ou simplement Z s'il n'y a pas d'ambiguïté), que Z_a est définie sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est périodique de période T_a qu'on calculera.

I

Soient $b \in \mathbb{R}_+^*$, $I = [-b, b]$, et $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$, une fonction continue vérifiant

$$\forall\, t \in I, \quad \varphi(t) \leq \lambda^2 \left(\int_0^t (t-s)\varphi(s)\, ds \right)$$

où λ est une constante strictement positif. On note $M = \sup\{\varphi(t) :\ t \in I\}$.

1°. Montrer que $\forall\, t \in I, \quad \varphi(t) \leq M \dfrac{(\lambda t)^2}{2}$.

2°. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, t \in I, \quad \varphi(t) \leq M \dfrac{(\lambda t)^{2n}}{(2n)!}$.

3°. En déduire que $\forall\, t \in I, \quad \varphi(t) = 0$.

II

Pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, on considère la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où Z_n est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par la relation de récurrence:

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad Z_0(t) = 0, \qquad \text{et } Z_{n+1}(t) = a - k^2 \int_0^t (t-s) \sin(Z_n(s))\, ds.$$

1°. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|Z_{n+1}(t) - Z_n(t)| \leq |a| \frac{(kt)^{2n}}{(2n)!}.$$

2°. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Z_n(t)$ converge vers une limite qu'on note $Z_a(t)$, (ou simplement $Z(t)$). Montrer aussi que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad |Z_n(t) - Z(t)| \leq |a|\, \frac{(kt)^{2n}}{(2n)!}\ \mathrm{ch}\,(kt).$$

3°. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

4°. Montrer aussi que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad Z(t) = a - k^2 \int_0^t (t-s)\sin(Z(s))\, ds.$$

5°. Montrer que Z est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est une solution de $\mathcal{P}_a$.

6°. Soit $W :]-b, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $W'' + k^2 \sin W = 0$ et $W(0) = a$, $W'(0) = 0$. Montrer que

$$\forall\, t \in]-b, b[, \qquad W(t) = a - k^2 \int_0^t (t-s)\sin(W(s))\, ds.$$

En déduire, en utilisant la partie I, que $\forall\, t \in]-b, b[, \quad W(t) = Z(t)$.

7°. Que peut-on en déduire concernant le problème $\mathcal{P}_a$?

III

Dans cette partie $a \in]0, \pi[$. On se propose d'étudier la fonction $Z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ trouvée dans la partie II et qui est l'unique solution maximale de $\mathcal{P}_a$.

1°. On pose $Y = (Z')^2$. Exprimer Y en fonction de Z. En déduire que $\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad Z(t) \in [-a, a]$.

2°. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall\, t \in]0, \alpha[, \quad Z(t) > 0$. En déduire que $\forall\, t \in]0, \alpha[, \quad Z'(t) < 0$.

3°.

a. Montrer que l'intérgrale $\tau = \dfrac{1}{k\sqrt{2}} \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos a}}$ converge.

b. Soit $\beta > \tau$. Montrer qu'il existe $t < \beta$ tel que $Z'(t) \geq 0$. (On raisonnera par l'absurde en notant que si pour tout $t \in]0, \beta[$, on a $Z'(t) < 0$ alors on peut écrire

$$\forall\, t \in]0, \beta[, \quad t = \frac{1}{k\sqrt{2}} \int_{Z(t)}^{a} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos a}}.)$$

4°. En déduire qu'il existe $T_a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $Z'(\frac{T_a}{2}) = 0$ et $\forall\, t \in]0, \frac{T_a}{2}[, \quad Z'(t) < 0$.

5°. Montrer que $Z(\frac{T_a}{2}) = -a$ et que Z induit un homéomorphisme strictement décroissante de $[0, \frac{T_a}{2}]$ sur $[-a, a]$.

6°. On pose $\widetilde{Z}(t) = -Z(t + \frac{T_a}{2})$. Montrer que $\widetilde{Z}$ vérifie $\mathcal{P}_a$, en déduire que $\widetilde{Z} = Z$, puis que Z est T_a-périodique. Montrer aussi que Z est paire.

7°. Montrer que la période T_a est donnée par $T_a = \frac{2\sqrt{2}}{k} \int_0^a \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos a}}$.

8°. En effectuant le changement de variable $\theta = 2\mathrm{Arc}\sin(\sin\frac{a}{2}\sin\varphi)$, montrer que

$$T_a = \frac{4}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{a}{2}\sin^2\varphi}}.$$

9°. Montrer que $T_a = \frac{2\pi}{k} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin^{2n}\frac{a}{2}$, où $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à déterminer.

10°. Que se passe-t-il si $a \notin]0, \pi[$?

$\mathcal{FIN}$

OMRAN KOUBA

Problème de Mathématiques

Soit V le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Première Partie

1°. Soit f appartenant à V. Montrer que la fonction g_1 définie sur $]0,1]$ par

$$g_1(x) = (\operatorname{Log} x) \int_0^x f(t)\, dt$$

admet la limite zéro quand x tend vers zéro (le symbole Log désigne le logarithme népérien). On pourra observer que f est bornée sur $[0,1]$.

2°. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (\operatorname{Log} t) f(t)\, dt$ est absolument convergente. On désigne sa valeur par J.

3°. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par les relations

$$(F)\begin{cases} g(x) = (\operatorname{Log} x) \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt + \int_x^1 (\operatorname{Log} t) f(t)\, dt \\ g(0) = J. \end{cases}$$

a. Montrer que g est dérivable sur $]0,1]$ et que l'on a, pour tout $x \in]0,1]$,

$$g'(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt.$$

b. Montrer que g admet une dérivée continue sur $[0,1]$; comparer $g'(0)$ et $f(0)$.

4°. Montrer que g admet une dérivée seconde sur $]0,1]$ vérifiant, pour tout $x \in]0,1]$,

$$xg''(x) + g'(x) = f(x).$$

5°. Dans cette question $f(x) = \sqrt{x}$. Calculer $g(x)$; $g''(0)$ existe-t-il ?

Deuxième Partie

Les relations (F) introduites dans la question **I**.3°. permettent d'associer à tout élément f de V un autre élément g de V. En posant $g = T(f)$, on obtient donc une application de V dans V, évidemment linéaire, que l'on va étudier dans la suite du problème.

1°. T est-elle injective ?

2°. Montrer que $T(V)$, image de V par T, est formée des fonctions g ayant les quatre propriétés suivantes:

— g est continuement dérivable sur $[0,1]$.

— g' est continuement dérivable sur $]0,1]$.

— $g(1)=0$.

— $xg''(x)$ tend vers zéro quand x tend vers zéro.

On pourrait utiliser la question **I**.4°.

3°. Pour f_1 et f_2 appartenant à V, on pose

$$(f_1 \mid f_2) = \int_0^1 f_1(x)f_2(x)\,dx.$$

Montrer que, si f_1 et f_2 appartenant à V, on a

$$(T(f_1) \mid f_2) = (f_1 \mid T(f_2)).$$

On pourrait poser $T(f_1)=g_1$, $T(f_2)=g_2$ et utiliser **I**.4°..

4°. Montrer que, pour tout f appartenant à V, $(T(f) \mid f) \leq 0$. Quand a-t-on $(T(f) \mid f) = 0$?

Troisième Partie

Soit α un réel ; s'il existe f non nul appartenant à V et tel que $T(f)=\alpha f$, on dit que α est valeur propre de T et que f est vecteur propre associé à α.

1°.

a. Montrer que les valeurs propres de T, s'il en existe, sont strictement négatives.

b. Soit f un vecteur propre de T. Établir que f est continuement dérivable sur $[0,1]$.

2°. Soit λ un réel strictement positif. Démontrer que, si $-\lambda$ est valeur propre de T et si f est un vecteur propre associé à $-\lambda$ alors l'application de $\left[0, \dfrac{1}{\lambda}\right]$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(\lambda x)$ est, sur $\left]0, \dfrac{1}{\lambda}\right]$, solution de l'équation différentielle (E): $xy''+y'+y=0$.

3°. Étant donné une série entière $1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R \neq 0$, déterminer les a_n pour que la fonction h somme de cette série soit, dans l'intervalle $]-R,+R[$, solution de (E). Que vaut R ?

4°. Soit $c>0$ et soit y une fonction continuement dérivable sur $[0,c]$, solution de (E) sur $]0,c]$ et vérifiant en outre $y(0)=0$.

a. Mettre sous forme aussi simple que possible la dérivée de la fonction qui, à $x \in]0, c]$, associe $xy'^2(x) + y^2(x)$.

b. Montrer que y est la fonction nulle sur $[0, c]$.

5°. Montrer que si f est vecteur propre de T associé à la valeur propre $-\lambda$ et si $f(0) = \mu$ alors on a, pour tout x appartenant à $[0, 1]$, $f(x) = \mu h\left(\frac{x}{\lambda}\right)$. On appliquera 4°. à la fonction $f - \mu h$.

6°. Montrer que $-\lambda$ est valeur propre de T si, et seulement si, $h\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0$.

7°. Montrer que si f_1 et f_2 sont des vecteurs propres de T associés à des valeurs propres différentes, alors $(f_1 \mid f_2) = 0$.

Quatrième Partie

Il reste donc à étudier les zéros de la fonction h définie par

$$h(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

1°.

a. Étudier les variations de h sur l'intervalle $[0, 2]$.

b. Quel est le signe de $h(2)$?

2°. Montrer qu'il existe r_1 strictement positif tel que l'on ait les deux propriétés suivantes:

$$h(r_1) = 0, \qquad h(x) \quad \text{différent de 0 pour tout } x < r_1.$$

3°. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a $xh'^2(x) + h^2(x) \leq 1$.

4°. On suppose provisoirement qu'il existe $c > 0$ tel que pour $x \geq c$ on ait $h(x) > 0$.

a. Montrer que la fonction qui à x associe $xh'(x)$ est décroissante sur $[c, +\infty[$.

b. Soit $x_0 \geq c$. Pour $x \geq x_0$, on pose $\varphi(x) = h(x) - x_0 h'(x_0) \operatorname{Log} x$. Quel est le signe de $\varphi'(x)$? Peut-on avoir $\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = +\infty$? Peut-on avoir $h'(x_0) < 0$?

c. Montrer que $h(x)$ admet, quand x tend vers $+\infty$, une limite ℓ strictement positive.

d. Montrer qu'il existe $x_1 \geq c$ tel que, pour tout $x \geq x_1$, on ait $h''(x) \leq \frac{-\ell}{2x}$.

e. En déduire que l'hypothèse provisoire faite au début de **IV**.4°. est absurde.

5°. Que peut-on en conclure concernant le nombre de zéros de h ?

FIN

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)\,d\theta. \tag{1}$$

Dans ce problème on se propose d'étudier quelques propriétés de la famille de fonctions $(J_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dont les éléments sont appelés les *fonctions de Bessel de première espèce.*

Première Partie

Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère la fonction

$$f_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \theta \mapsto \exp(ix\sin\theta).$$

1°. Soit $(c_n(f_x))_{n\in\mathbb{Z}}$ la famille des coefficients de Fourier exponentiels de la fonction 2π-périodique f_x. Montrer que $c_n(f_x) = J_n(x)$.

2°. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

3°. Justifier l'égalité $e^{ix\sin\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x)\,e^{in\theta}$. En déduire les développements en séries de Fourier des fonctions $\theta \mapsto \cos(x\sin\theta)$ et $\theta \mapsto \sin(x\sin\theta)$.

4°. Démontrer, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les égalités suivantes

$$J_0(x-y) = J_0(x)J_0(y) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)J_n(y), \qquad \text{et} \quad 1 = J_0^2(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(x).$$

Deuxième Partie

1°. Montrer que J_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.(On exprimera $J_n^{(k)}(x)$ sous forme d'une intégrale).

2°. Montrer que, pour tout couple $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \left|J_n^{(k)}(x)\right| \leq 1.$$

3°. On note $R_m(x) = J_n(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{J_n^{(k)}(0)}{k!} x^k$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|R_m(x)| \leq \frac{|x|^m}{m!}.$$

En déduire que J_n est développable en série entière. Quelle est le rayon de convergence de cette série.

4°. Montrer que,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad J_0(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}.$$

(On pourrait développer $x \mapsto \cos(x \sin\theta)$ en série entière).

5°. *a.* Montrer que,

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad 2J_n'(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x).$$

b. En déduire que $J_1 = -J_0'$.

c. Montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}.$$

6°. Montrer que J_n est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle suivante: (*dite de Bessel*)

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \tag{2}$$

7°. Soit y une fonction développable en série entière $\sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p$ de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que, si y est solution de l'équation de Bessel (2), alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda J_n$.

TROISIÈME PARTIE

Soient $I = [\alpha, +\infty[$, et $q : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère alors l'équation différentielle

$$u''(x) + q(x)u(x) = 0. \tag{3}$$

A.

1°. Soit u une solution de (3). On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $u(x_0) = 0$ et $u'(x_0) = 0$. Que peut-on dire de u ?

2°. Soit u une solution de (3). On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ et une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $I\setminus\{x_0\}$ telle que, pour tout n, $u(t_n) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} t_n = x_0$. Montrer que $u(x_0) = u'(x_0) = 0$.

3°. Soit u une solution *non nulle* de (3). On suppose que u admet un zéro $x_0 \in I$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que x_0 soit l'unique zéro de u dans $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap I$.

4°. En déduire que, si u est une solution *non nulle* de (3), alors tout intervalle compact contenu dans I ne peut contenir qu'un nombre fini de zéros de u.

B. On suppose dans cette sous-partie qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall\, x \in I,\ q(x) \geq \mu^2$. Soit u une solution *non nulle* de (3).

1°. Soit v une solution de l'équation différentielle $v'' + \mu^2 v = 0$. On pose $\varphi(x) = v'(x)u(x) - v(x)u'(x)$. Montrer que, pour tout $(a, b) \in I \times I$ tel que $a < b$, on a

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b (q(x) - \mu^2)u(x)v(x)\, dx.$$

2°. Pour $a \in I$, on pose $b = a + \dfrac{\pi}{\mu}$ et $v(x) = \sin\mu(x - a)$. Montrer que l'hypothèse "u ne s'annule pas sur $[a, b]$" est absurde.

3°. Que peut-on déduire concernant les zéros de u ?

C. Dans cette sous-partie $n \in \mathbb{N}$ est fixé.

1°. On pose, pour $x > 0$, $u_n(x) = \sqrt{x}J_n(x)$. Montrer que u est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle $u''(x) + q_n(x)u(x) = 0$, où q_n est une fonction qui vérifie $\forall\, x \geq n,\ q_n(x) \geq \dfrac{1}{4n^2 + 1}$.
Que peut-on déduire concernant les zéros de J_n ?

2°. Pour $\beta > 0$, on pose $Y_\beta(x) = J_n(\beta x)$.
   a. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par Y_β ?
   b. Soient $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, avec $\beta < \gamma$. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto x(Y_\beta'(x)Y_\gamma(x) - Y_\beta(x)Y_\gamma'(x))$, en fonction de x, $Y_\beta(x)$ et $Y_\gamma(x)$.
   c. En déduire que si β et γ sont deux zéros non nuls de J_n alors

$$\int_0^1 xJ_n(\beta x)J_n(\gamma x)\, dx = 0.$$

$\mathcal{FIN}$

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

Dans tout le problème, on désigne par λ un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et par g la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{1}{x^{1-\lambda}(x-1)^{\lambda}}.$$

On se propose de déterminer une suite (v_n) de fractions rationnelles convergeant uniformément vers g sur tout compact de $]1,+\infty[$, ce qui fait l'objet de la partie **III**.

La partie **II** est consacrée à l'étude d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et la partie **I** au calcul de l'intégrale $u_k = \displaystyle\int_0^1 t^k \omega(t)\,dt$, k désignant un entier naturel et ω la fonction définie sur $]0,1[$ par

$$\omega(t) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi}\frac{1}{t^{1-\lambda}(1-t)^{\lambda}}.$$

PREMIÈRE PARTIE

On note $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\lambda}(1-t)^{\lambda}}$.

1° *a.* Établir la convergence de $I(\lambda)$.

b. À l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{du}{u^{1-\lambda}(1+u)}.$$

c. En déduire l'expression de l'intégrale $I(\lambda)$ au moyen de $J(\lambda)$ et de $J(1-\lambda)$ où $J(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 \frac{du}{u^{1-\lambda}(1+u)}$.

2° *a.* Prouver que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout $u \in [0,1]$,

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u^k + (-1)^n \frac{u^n}{1+u}.$$

En déduire une expression de $J(\lambda)$ comme somme d'une série convergente.

b. En déduire que $I(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} + 2\lambda \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\lambda^2 - n^2}$.

3°. Soit f la fonction 2π-périodique telle que $\forall\, t \in [-\pi, \pi]$, $f(t) = \cos(\lambda t)$.

a. f est-elle développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$?

b. Déterminer le dévloppement en série de Fourier de f.

c. En déduire u_0.

4°. *a.* Prouver que, si $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \dfrac{k + \lambda - 1}{k} u_{k-1}$.

b. En déduire u_k.

5°. *a.* Démontrer que, pour $x > 1$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\omega(t)}{x - t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{x^{n+1}}$. (On procèdera comme dans la question **I.**2°.*a.*)

b. Démontrer que la fonction g, définie dans l'introduction, est égale à la somme d'une série entière par rapport à $\dfrac{1}{x}$.

c. En déduire l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\omega(t)}{x - t}\, dt = g(x)$.

Deuxième Partie

Dans toute la suite, on munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto (P \,|\, Q) = \int_0^1 \omega(t) P(t) Q(t)\, dt$$

et de la norme euclidienne associée $P \mapsto \|P\| = \sqrt{(P \,|\, P)}$.

$\mathbb{R}[X]$ muni de ce produit scalaire sera noté $(\mathbb{R}[X], (\,|\,))$. (On ne demande pas de vérifier que $(\,|\,)$ est un produit scalaire.)

1°. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $A_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k(n) X^k$ la projection orthogonale de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (espace des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$).

a. Montrer que la suite des réels $(a_0(n), a_1(n), \ldots, a_{n-1}(n))$ est solution du système

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k(n) \prod_{i=k+1}^{n} \frac{i + p}{i + \lambda - 1 + p} = 1 \qquad p \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

b. On associe à $A_n(X)$ la fraction rationnelle

$$F(X) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(n) \prod_{i=k+1}^{n} \frac{i + X}{i + \lambda - 1 + X}.$$

Déterminer les zéros et les pôles de F. Que vaut $F(-n)$? En déduire

$$F(X) = \prod_{p=0}^{n-1} \frac{n-\lambda-p}{n+p} \frac{X-p}{X+\lambda+p}.$$

c. En déduire la valeur du coefficient dominant $a_{n-1}(n)$ de $A_n(X)$.

2° *a*. Démontrer qu'il existe une famille unique $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$, vérifiant pour tout entier n, les propriétés suivantes:

— le coefficient dominant de P_n est égal à 1.

— $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de $(\mathbb{R}_n[X], (\,|\,))$.

Écrire P_0 et P_1 et exprimer, pour $n \geq 1$, $P_n(X)$ en fonction de $A_n(X)$.

b. Montrer que $\|P_n\|^2 = (X^n \mid X^n - A_n(X)) = u_{2n}F(n)$.

c. Soit p le nombre des racines a_i d'ordre de multiplicité impair du polynôme P_n appartenant à l'intervalle $]0,1[$. Si $p = 0$, on pose $S(X) = 1$; sinon, on pose $S(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - a_i)$.

Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 P_n(x)S(x)\omega(x)\,dx$ est nulle si $p < n$. En déduire que P_n a n racines distinctes appartenant à $]0,1[$.

d. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe des réel α_n et β_n tels que

$$XP_n = P_{n+1} + \alpha_n P_n + \beta_n P_{n-1}.$$

Calculer $(XP_n \mid P_{n+1})$ puis β_n en fonction de $\|P_{n+1}\|^2$, $\|P_n\|^2$, et de $\|P_{n-1}\|^2$.

Calculer α_n en fonction de n et de λ.

3°. On considère la famille de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \geq 1, \qquad Q_n(x) = \int_0^1 \omega(t) \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t}\, dt.$$

a. Déterminer Q_0 et Q_1 et montrer que, pour $n \geq 1$, l'on a:

$$XQ_n = Q_{n+1} + \alpha_n Q_n + \beta_n Q_{n-1}.$$

b. En déduire que $\dfrac{P_n Q_{n+1} - P_{n+1} Q_n}{\|P_n\|^2}$ est indépendant de n et donner sa valeur.

Troisième Partie

Dans ce qui suit, x désigne un réel strictement supérieur à 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = Q_n/P_n$.

1°. Que vaut $v_0(x)$? Exprimer $v_{n+1}(x)$ en fonction de $v_n(x)$, $P_n(x)$ et $P_{n+1}(x)$.

2°. *a*. Que vaut $\displaystyle\int_0^1 \omega(t)\frac{P_n(x)-P_n(t)}{x-t}P_n(t)\,dt$?

b. En déduire que

$$g(x) - v_n(x) = \frac{1}{(P_n(x))^2}\int_0^1 \omega(t)\frac{(P_n(t))^2}{x-t}\,dt.$$

3°. Soit a un réel donné $a > 1$; il sera admis que l'application $\langle,\rangle$:

$$(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{a-t}P(t)Q(t)\,dt$$

est un produit scalaire. L'espace euclidien ainsi défini sera noté $(\mathbb{R}_n[X],\langle,\rangle)$ et la norme déduite du produit scalaire $|||\ |||$.

a. Soit $F_n(a)$ le sous-ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ nuls en a:

$$F_n(a) = \{P \mid P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(a) = 0\}.$$

Démontrer que $F_n(a)$ est l'hyperplan orthogonal au polynôme P_n dans $(\mathbb{R}_n[X],\langle,\rangle)$.

b. Soit $G_n(a)$ le sous-ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ prenant la valeur 1 en a. Démontrer que $G_n(a)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}_n[X]$ obtenu à partir de $F_n(a)$ par une translation. Déterminer le vecteur translation lorsque ce vecteur est orthogonal à $F_n(a)$. En déduire l'égalité

$$\inf_{P\in G_n(a)} |||P|||^2 = \frac{|||P_n|||^2}{(P_n(a))^2}.$$

4°. Déduire des résutats précédents, pour tout réel a, $a > 1$, l'inégalité

$$g(a) - v_n(a) \leq \frac{1}{(aP_{n-1}(a))^2}\int_0^1 \omega(t)\frac{(tP_{n-1}(t))^2}{a-t}\,dt.$$

5°. Démontrer, pour tout réel a, $a > 1$, les inégalités

$$0 \leq g(a) - v_n(a) \leq \frac{1}{a^{2n}}g(a).$$

En déduire que la suite des fractions rationnelles v_n converge simplement vers g sur $]1,+\infty[$ et converge uniformément sur tout intervalle compact contenu dans $]1,+\infty[$.

FIN

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

On note $\mathbb{R}[X]$ (resp. $\mathbb{R}_n[X]$) l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels (resp. de degré inférieur ou égal à n).

On étudie dans ce problème les couples (F_n, G_n), (pour $n \in \mathbb{N}^*$), vérifiant:

$$(1-X)^n F_n + X^n G_n = 1 \quad \text{et} \quad (F_n, G_n) \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^2 \qquad (\mathcal{E}_n)$$

I

1°

a. Montrer l'existence d'un couple (F_n, G_n) solution de $\mathcal{E}_n$. (On pourrait calculer $((1-X)+X)^k$ où k est un entier convenablement choisi).

b. Expliciter F_1, F_2, F_3 et déterminer leurs zéros réels.

2°

a. Déterminer en fonction de F_n et G_n tous les couples (A, B) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que:

$$(1-X)^n A + X^n B = 1.$$

b. Montrer l'unicité du couple (F_n, G_n) solution de $\mathcal{E}_n$.

3°

a. Calculer $F_n(0)$ et $F_n(1)$.

b. Montrer que $G_n(X) = F_n(1-X)$.

c. Calculer $F_n(1/2)$.

II

Dans cette partie, On suppose $n \geq 2$.

1° Déduire de $\mathcal{E}_n$ que F_n est solution de léquation différentielle:

$$ny - (1-x)y' = nC_{2n-1}^{n} x^{n-1}.$$

2° Déterminer les coefficients du polynôme F_n. On vérifiera qu'il sont tous strictement positifs.

3° En déduire que

$$a. \quad C_{2n-2}^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^{k}(-1)^{n-1-k}, \qquad b. \quad C_{2n-1}^{n} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{k+n-1}^{k}.$$

III

Dans cette partie, on suppose $n \geq 2$, et on pose $A_n(X) = (1-X)^n F_n(X)$.

1° Montrer que A_n est un polynôme qu'on déterminera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

2° Montrer que 0 et 1 sont zéros de A'_n dont on déterminera les ordres de multiplicité.

3° En déduire que, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$A_n(x) = 1 - nC_{2n-1}^{n} \int_0^x t^{n-1}(1-t)^{n-1}\, dt.$$

Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{n-1}\, dt$?

4° Étudier le signe de $A_n(x)$ suivant les valeurs de x et de n. En déduire le signe de $F_n(x)$. Montrer que, pour $p \geq 1$, F_{2p} a un unique zéro réel strictement négatif que l'on notera x_p dans la suite.

IV

1°

a. Montrer que $\forall\, p \geq 1, \quad (x_p)^{2p} F_{2p}(1-x_p) = 1$. En déduire que:

$$|x_p| \leq \left(C_{4p-1}^{2p-1}\right)^{-1/2p}.$$

b. Montrer que: $\forall\, n \geq 3, \quad 2^n < C_{2n-1}^{n-1}$.

c. En déduire un encadrement de x_p indépendant de p.

2°

a. En utilisant $I.2°$, montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour $n \geq 2$,

$$(1-X)F_n = F_{n-1} + (aX+b)X^{n-1}.$$

Déterminer a et b.

b. En déduire que pour $n \geq 3$:

$$(1-X)^2 F_n = F_{n-2} + X^{n-2}(1-2X)C_{2n-3}^{n-1}\left(\frac{n-1}{4n-6} + X - X^2\right).$$

3° Soit $Q_p = \dfrac{2p-1}{8p-6} + X - X^2$ pour $p \geq 1$.

a. Montrer que Q_p a un unique zéro réel négatif, y_p, que l'on déterminera en fonction de p.

b. Déterminer le sens de variation et la limite de la suite $(y_p)_{p\geq 1}$.

4°

a. Vérifier que $F_2(y_1) > 0$.

b. Montrer que $\forall\, p \geq 1, \quad F_{2p}(y_p) > 0$.

c. En déduire, pour $p \geq 1$, le signe de $y_p - x_p$ puis, pour $p \geq 2$, celui de $F_{2p-2}(x_p)$.

d. Montrer que la suite $(x_p)_{p\geq 1}$ est monotone et a une limite finie L (qu'on déterminera plus loin) vérifiant: $L \leq \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

V

1°

a. Soit $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers une limite réelle v. Montrer que la suite $(u_p)_{p\geq 1}$ de terme général: $u_p = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} v_k$ converge vers v.

b. Soit la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_0 = \operatorname{Log} 6, \qquad \text{et pour } k \geq 1, \quad v_k = \operatorname{Log}\left((2k+2)C_{4k+3}^{2k+2}\right) - \operatorname{Log}\left(2kC_{4k-1}^{2k}\right).$$

Déterminer la limite de la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$. En déduire la limite lorsque p tend vers l'infini de $\left(2pC_{4p-1}^{2p}\right)^{1/(2p-1)}$.

2° Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on pose: $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha u^n(1+u)^n\,du$.

a. Soit $\varepsilon \in]0,\alpha[$. Montrer que:

$$\varepsilon(\alpha-\varepsilon)^n(1+\alpha-\varepsilon)^n \leq I_n(\alpha) \leq \alpha^{n+1}(1+\alpha)^n.$$

b. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (I_n(\alpha))^{1/n} = \alpha(1+\alpha)$.

3° Soit x_p le zéro réel de F_{2p}.

a. Calculer $I_{2p-1}(-x_p)$.

b. Montrer que $I_{2p-1}(-L) \leq \left(2pC_{4p-1}^{2p}\right)^{-1}$.

c. En déduire à l'aide des questions précédentes que: $L^2 - L - 1/4 \leq 0$.

d. Déterminer la valeur exacte de L.

$\mathcal{FIN}$

OMRAN KOUBA

Problème de Mathématiques

Ce problème contient trois exercices indépendants

EXERCICE .1 Dans cet exercice $(F_n)_{n\geq 1}$ est la suite définie par

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \qquad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \text{ pour } \quad (n \geq 1).$$

1°. Montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} F_n = +\infty$.

2°. On note ω la racine positive de $x^2 = x+1$. Calculer, pour $n \geq 1$, la valeur de $\dfrac{F_{n+1} - \omega F_n}{F_n - \omega F_{n-1}}$ en fonction de ω.

En déduire que la limite de la suite de terme general $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ existe. Que vaut cette limite ?

3°. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+2}}{F_n}$.

4°. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles $(x_n)_{n\geq 0}$ qui vérifient $\forall\, n \geq 1$, $x_{n+1} = 3x_n - x_{n-1}$.

a. Montrer que les deux suites $(F_{2n})_{n\geq 0}$ et $(F_{2n+1})_{n\geq 0}$ appartiennt à $\mathcal{E}$.

b. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathcal{E}$. Montrer que $x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1}$ ne dépend pas de n. En déduire la valeur de $(x_1^2 - x_0x_2)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k x_{k+1}}$ en fonction de x_0, x_1, x_n et x_{n+1}.

c. Conclure que les deux séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+2}F_{2n}}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+3}F_{2n+1}}$ convergent, et calculer leur sommes.

d. En déduire la convergence et la somme de chacune des deux séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_{n+2}F_n}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{n+2}F_n}$.

EXERCICE .2

I. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge. On note α sa valeur.

II. Soient $\varphi : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et $x \in [0, \pi/2]$ fixé. On note $J_n = \displaystyle\int_0^{x} \varphi(t) \sin(2n+1)t\, dt$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = 0$. (On pourrait effectuer une intégration par parties).

III. Soit $x \in [0, \pi/2]$. On pose

$$a_n(x) = \frac{\sin 2nx}{n}, \qquad \text{et} \qquad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x).$$

1°. Calculer $1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx)$ en fonction de $\sin x$ et de $\sin(2n+1)x$.

2°. En déduire que

$$S_n(x) + x = \int_0^x \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\, dt.$$

3°. On pose, pour $t \in]0, \pi/2]$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$. Montrer que φ est prolongeagable en une fonction de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$. On note encore φ la fonction ainsi prolongée. Quelles sont les valeurs de $\varphi(0)$ et de $\varphi'(0)$?

4°. Montrer que

$$S_n(x) + x = \int_0^x \varphi(t) \sin(2n+1)t\, dt + \int_0^{(2n+1)x} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

En déduire que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ converge. On note $S(x)$ sa somme. Montrer que $\forall\, x \in]0, \pi/2], \quad S(x) + x = \alpha.$

5°. Donner la valeur de α et de $S(x)$ pour $x \in [0, \pi/2]$. Est-ce que la fonction $x \mapsto S(x)$ est continue sur $[0, \pi/2]$?

Exercice .3 n est un entier fixé supérieur ou égal à 3.

1°.

a. Soit $m \in \mathbb{Z}$. On note $\alpha = \dfrac{m}{2(n+1)}$ et $C(m) = \sum_{k=1}^{n} \cos(2k\pi\alpha)$. Montrer que , si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, la somme $C(m)$ est égale à 0 ou à -1 selon la parité de m. Que vaut $C(m)$ pour $\alpha \in \mathbb{Z}$?

b. Soit $U = (u_{pq})$ la matrice réelle d'ordre n définie par

$$u_{pq} = \sin \frac{pq\pi}{n+1}, \quad 1 \leq p, q \leq n.$$

Montrer que $U^2 = \dfrac{n}{2} I$. En déduire que U est inversible. Exprimer U^{-1} en fonction de n et de U.

2°. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice réelle d'ordre n définie par $a_{ij} = 1$ si $|i-j| = 1$ et $a_{ij} = 0$ si $|i-j| \neq 1$. On note X_q le $q^{\text{ième}}$ vecteur colonne de U.$(1 \leq q \leq n)$.

a. Montrer que X_q est un vecteur propre de A. Quelle est la valeur propre associée α_q ?

b. Est-ce que le système $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est libre ?

c. Ecrire une formule donnant une matrice diagonale D semblable à A et qui n'utilise que les matrices A et U.

$\mathcal{FIN}$

Problème de Mathématiques

Dans tout le problème $\mathcal{A}$ désigne l'algèbre $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre 4 à coefficients complexes. On note I la matrice identité et , pour $A \in \mathcal{A}$, on note $\mathrm{Tr}\,(A)$ la trace de A. On dit que les deux matrices A et B de $\mathcal{A}$ *anticommutent* si, et seulement si, $AB = -BA$.

1°.

a. Soient A et B deux élements de $\mathcal{A}$. Verifier l'égalité $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$.

b. Si A n'est pas la matrice nulle, comment peut-on choisir B pour que $\mathrm{Tr}\,(AB)$ ne soit pas nulle ?

2°. On suppose que A et B vérifient $A^2 = B^2 = I$ et qu'elles anticommutent.

a. En simplifiant de deux façons différentes $\mathrm{Tr}\,(BAB)$, montrer que la trace de A est nulle. Quelle est la valeur de $\mathrm{Tr}\,(B)$?

b. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ? Quelles sont leurs valeurs propres et les ordres de multiplicité de ces valeurs propres ?

c. Calculer le carré de la matrice iAB et vérifier qu'elle anticommute avec A et B. Quelle est la valeur de $\mathrm{Tr}\,(AB)$ et quelles sont les valeurs propres de iAB ?

3°. Soient α et β les endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^4$ respectivement représentés par les matrices A et B de la question 2° dans la base canonique de $\mathbb{C}^4$. On note P_α (resp. P_β) l'ensemble des points de $\mathbb{C}^4$ invariants par α (resp. β) ; On note de même Π_α (resp Π_β) un autre sous-espace propre de α (resp. β) de dimension maximale.

a. Quelles sont les dimensions de P_α, P_β, Π_α et Π_β ?

b. Quelles sont les intersections deux à deux des sous-espaces P_α, P_β, Π_α et Π_β ?

c. Quelle est l'image de P_β par α et de P_α par β ?

4°. Soient A_1,A_2,A_3 et A_4, quatre matrices de $\mathcal{A}$, chacune de carré I, et qui anticommutent deux à deux.

a. On note $B = iA_1A_2A_3$. Calculer B^2 et $BA_4 + A_4B$. Quelle est la trace et quelles sont les valeurs propres de B ?

b. Quelle est la trace et quelles sont les valeurs propres de $A_1A_2A_3A_4$?

5°. On conserve les notations de 4°, et on pose

$$\begin{array}{rlrlrlrl}
A_5 = & iA_1A_2, & A_6 = & iA_1A_3, & A_7 = & iA_1A_4, & A_8 = & iA_2A_3 \\
A_9 = & iA_2A_4, & A_{10} = & iA_3A_4, & A_{11} = & iA_2A_3A_4, & A_{12} = & iA_1A_3A_4, \\
A_{13} = & iA_1A_2A_4, & A_{14} = & iA_1A_2A_3, & A_{15} = & A_1A_2A_3A_4, & A_{16} = & I
\end{array}$$

a. Soient i et j deux entiers de $\{1,\dots,15\}$. Calculer $\operatorname{Tr}(A_iA_j)$.

b. En déduire que $\{A_i\}_{1\le i\le 16}$ constitue une base de $\mathcal{A}$.

c. On considère les 4 matrices:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier qu'elles satisfont aux conditions imposées aux matrices A_1, A_2, A_3, A_4 dans la question4°.

d. Que peut-on conclure ?

$\mathcal{FIN}$

OMRAN KOUBA

Problème de Mathématiques

EXERCICE .1 On considère la fonction $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x-1}{\operatorname{Log} x}.$$

1°. *a*. Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$, qu'on notera encore f.

b. Donner un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de la fonction f.

c. Etudier et représenter graphiquement f.

2°. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par: $u_n = \displaystyle\sum_{p=n}^{2n} \frac{1}{p}$.

En comparant avec une intégrale, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\operatorname{Log} 2$.

3°. On note $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

a. Montrer, par un changement de variable convenable, que:

$$I = \sum_{p=n}^{2n} \int_0^1 f(u)u^p\,du.$$

b. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (n+1) \int_0^1 f(u)u^n\,du = f(1)$.

c. En déduire que $I = \operatorname{Log} 2$.

EXERCICE .2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier positif $k(n)$, et un seul, vérifiant l'inégalité: $2^{k(n)} \leq n < 2^{k(n)+1}$, on pose alors $L(n) = 2^{k(n)}$, et si l'ecriture en base 2 de n est $n = \sum_{k\geq 1} \varepsilon_k 2^{k-1}$ alors on note $S(n) = \sum_{k\geq 1} \varepsilon_k$ c'est à dire la somme des chiffres de n dans son écriture binaire.

On se propose d'étudier, pour $\alpha > 0$, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(L(n))^\alpha S(n)}$$

et de calculer sa somme $T(\alpha)$ lorsqu'elle converge.

1°. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de $\mathbb{R}_+^*$. On pose $b_n = 2^n a_{2^n}$. Montrer que les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature.

2°. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(L(n))^\alpha S(n)}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Dans la suite du problème on suppose que $\alpha > 1$.

3°. Pour $m > 0$, on pose $A_m = \left\{2^m + \sum_1^m \varepsilon_k 2^{k-1} : (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m) \in \{0,1\}^m\right\}$, avec la convention $A_0 = \{1\}$.

a. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in A_m} \frac{1}{(L(n))^\alpha S(n)} = \frac{1}{2^{\alpha m}} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k+1} C_m^k.$

b. En déduire que

$$T(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{m+1} - 1}{2^{\alpha m}(m+1)}.$$

c. Montrer que pour $x \in [-1, 1[$, on a $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m+1}}{m+1} = -\mathrm{Log}\,(1-x)$. En déduire la valure de $T(\alpha)$. Puis Calculer

$$\lim_{\alpha \overset{>}{\to} 1} \frac{T(\alpha)}{\mathrm{Log}\,(\alpha - 1)}.$$

EXERCICE .3 Dans cette exercice, on se propose de démontrer qu'il existe une, et une seule, fonction dérivable sur $[0,1]$ telle que

$$f(0)=1, \quad \text{et } \forall x \in [0,1], \quad f'(x)=f(x-x^2). \tag{$*$}$$

1°. On note $E = (C([0,1]), \| \,.\, \|_\infty)$ l'espace vectoriel normé des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme. Montrer que E est complet.

Dans la suite, pour $f \in E$, on note $\Phi(f)$ l'élément de E définie par,

$$\Phi(f)(x) = 1 + \int_0^x f(t-t^2)\,dt.$$

2°. Montrer que f est solution de $(*)$ si, et seulement si, $\Phi(f) = f$.

3°. On note $\varphi(f) = \Phi\circ\Phi(f)$.

a. Montrer l'inégalité

$$\forall\,(f,g) \in E \times E, \quad \|\varphi(f)-\varphi(g)\|_\infty \leq \frac{1}{6}\,\|f-g\|_\infty\,.$$

b. En déduire que $(*)$ admet au plus une solution.

4°. Soit $g_0 \in E$. On définit par récurrence la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, en posant $g_{n+1} = \varphi(g_n)$.

a. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $\|g_{n+1}-g_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{6^n}\,\|g_1-g_0\|_\infty$.

b. Montrer que, pour tout $m > n \geq 0$,on a $\|g_m-g_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{5.6^{n-1}}\,\|g_1-g_0\|_\infty$.

c. En déduire que la suite $(g_n)_{n\geq 0}$ converge vers un élément g de E, qui est la solution unique de $\varphi(g) = g$.

5°. Soit $f_0 = 1$. On définit par récurrence la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, en posant $f_{n+1} = \Phi(f_n)$. En étudiant les suites $(f_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $f \in E$, qui est la solution unique de $(*)$.

$\mathcal{FIN}$

OMRAN KOUBA

Problème de Mathématiques

Première Partie

1°. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe, dans l'intervalle $[n\pi, n\pi + \pi/2[$, une solution ω_n et une seule de l'équation

$$\operatorname{tg} x = x. \tag{1}$$

2°. Soit l'équation différentielle: $v''(x) + \omega^2 v(x) = 0.$ (2)

où $\omega \in \mathbb{R}_+$ est donné, et où v est une application inconnue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que (2) a des solutions *non nulles* vérifiant la condition

$$v(0) = 0, \quad v'(1) = v(1). \tag{3}$$

si, et seulement si, ω est une racine de l'équation (1). Lorsque la condition est remplie, expliciter les solutions de (2) vérifiant (3).

Dans Toute la suite du problème on Pose $v_0(x) = x, \quad$ et $v_n(x) = \sin(\omega_n x)$.

3°. Calculer, pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, les intégrales $I(n, m) = \displaystyle\int_0^1 v_n(x) v_m(x)\, dx$, en fonction de $(\omega_n)_{n \geq 0}$.

Duexième Partie

Soient E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, et E'' le sous-espace de E constitué par les applications $f \in E$ qui sont de classe C^2 et vérifient en outre la condition:$f(0) = 0$ et $f'(1) = f(1)$.

Soit aussi K l'application de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ déterminée par:

$$K(x, y) = \begin{cases} e^y \operatorname{sh} x & \text{si} \quad x \leq y. \\ e^x \operatorname{sh} y & \text{si} \quad y \leq x. \end{cases}$$

1°. Soit $f \in E$. On considère l'application F de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y)\, dy. \tag{4}$$

Vérifier que F appartient à E'', et que $F'' = F - f$.

2°. On note $\Phi(f)$ la fonction $F \in E''$ associée à $f \in E$ comme dans la question précédente.

a. Montrer que Φ est une bijection linéaire de E sur E''.

On note φ la restriction de Φ à E'', φ est alors, un endomorphisme de E''.

b. Est-ce que φ est un automorphisme ?

c. Montrer que les valeurs propres de φ sont les éléments d'une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et donner, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ les applications propres associées à λ_n.

3°. A tout couple $(n, f) \in \mathbb{N} \times E$, on associe le réel

$$a_n(f) = \frac{1}{I(n,n)} \int_0^1 v_n(x) f(x)\, dx.$$

où v_n et $I(n,n)$ ont la même signification que dans la première partie.

a. F désignant toujours $\Phi(f)$, exprimer $a_n(f)$ au moyen de $a_n(F)$ et de ω_n.

b. Etant donné $f \in E''$, que peut-on dire de la convergence de la série de terme général $a_n(f)$?

TROISIÈME PARTIE

On reprend les notations des questions précédentes.

1°. Montrer que si S est une série numérique réelle absolument convergente, de terme général s_n, alors, pour tout $x \in [0,1]$, la série de terme général $s_n v_n(x)$ est convergente, ce qui permet d'associer à S l'application g_S de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ déterminée par:

$$g_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k v_k(x).$$

Montrer aussi que $g_S \in E$.

2°. $\mathcal{S}$ désignant l'espace vectoriel des séries numériques réelles absolument convergentes, montrer que $\mathcal{E} = \{g_S : S \in \mathcal{S}\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

3°. Soient une série $S \in \mathcal{S}$ et l'application associée g_S.

a. Calculer les réels $(a_n(g_S))_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction des termes de S.

b. On se place dans le cas où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(g_S) = 0$. Que peut-on dire de l'application g_S.

$\mathcal{FIN}$

OMRAN KOUBA

Problème de Mathématiques

Les quatre parties de ce problème sont indépendantes sauf pour les notations.

Dans ce problème $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des fonctions f continues sur $[0, +\infty[$ et telles que $\displaystyle\int_0^{\infty} |f(t)|^2 \, e^{-t} \, dt$ converge.

PREMIÈRE PARTIE

1°. Montrer que, si f et g sont deux éléments de $\mathcal{F}$, alors $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\, g(t)\, e^{-t} \, dt$ converge absolument. (On pourrait noter que, pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, $\lambda \mapsto \displaystyle\int_0^{x} (|f(t)| + \lambda\, |g(t)|)^2 e^{-t} \, dt$ est une fonction polynômiale positive de second degré).

2°. En déduire que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel, et que

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\infty} f(t)\, g(t)\, e^{-t} \, dt$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{F}$.

Dans la suite, on note $\| \, . \, \|$ la norme associée à ce produit scalaire.

3°. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $e_\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{-\alpha x}$. Montrer que e_α appartient à $\mathcal{F}$ si, et seulement si, $\alpha > -\dfrac{1}{2}$.

4°. Si $\beta \in \mathbb{R}_+$, on note $g_\beta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^\beta$. Montrer que g_β appartient à $\mathcal{F}$.

Dans la suite du problème on note E (respectivement E_n) le sous espace de $\mathcal{F}$ engendré par $\{g_k : k \in \mathbb{N}\}$ (respectivement $\{g_k : k \in [0, n] \cap \mathbb{N}\}$). Par abus on écrira X^n pour désigner la fonction g_n, pour $n \in \mathbb{N}$.

DEUXIÈME PARTIE

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}\, e^x \, \frac{d^n}{dx^n}(x^n \, e^{-x}).$$

1°. Montrer que L_n est une fonction polynômiale de degré n. Expliciter L_n.

2°. Soit $P \in E$. Montrer que

$$\langle L_n, P \rangle = \frac{(-1)^n}{n!} \langle X^n, P^{(n)} \rangle.$$

3°. En déduire que la famille $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.

4°. Calculer $\|L_n\|$. Que peut-on Conclure ?

5°. Si $P \in E$ on pose $\mu(P) = XP'' + (1 - X)P'$.

a. Montrer que, pour tout $(P, Q) \in E \times E$, $\langle \mu(P), Q\rangle = \langle P, \mu(Q)\rangle$.

b. Montrer que $\mu(E_n) \subset E_n$. Que vaut $\langle \mu(L_n), L_m\rangle$ si $n \neq m$?

c. En déduire qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$, qu'on déterminera, tel que $\mu(L_n) = \lambda_n L_n$.

d. On pose $F_n = \{P \in E : \mu(P) = -nP\}$. Montrer que tout polynôme de F_n est soit nul soit de degré n. En déduire que F_n est un sous-espace vectoriel de dimension 1, et donner une base de F_n.

Déduire que l'équation différentielle $xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$ admet une solution polynômiale "unique à un facteur multiplicatif près", exprimer cette solution en fonction de L_n.

6°.

a. Montrer que, pour $n \geq 1$, il existe trois coefficients a_n, b_n et c_n tels que

$$XL_n = a_n L_{n+1} + b_n L_n + c_n L_{n-1}.$$

b. En déduire que, pour $n \geq 1$, $XL_n = -(n + 1)L_{n+1} + (2n + 1)L_n - nL_{n-1}$.

7°.

a. Utiliser la relation précédente, pour montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} L_k(X)L_k(Y) = (n + 1)\frac{L_{n+1}(X)L_n(Y) - L_{n+1}(Y)L_n(X)}{Y - X}.$$

puis

$$\sum_{k=0}^{n} L_k^2(X) = (n + 1)\left(L_{n+1}(X)L_n'(X) - L_{n+1}'(X)L_n(X)\right).$$

b. Montrer que L_n et L_{n+1} n'ont pas de racine commune et que L_n/L_{n+1} est strictement croissante sur tout inervalle où elle est définie.

c. Soit S l'ensemble des racines de L_n qui appartiennent à l'intervalle $]0, +\infty[$ et qui sont de multiplicité impaire. On note $P = \prod_{a \in S}(X - a)$ si $S \neq \emptyset$ et $P = 1$ si $S = \emptyset$.

Montrer que $\langle L_n, P\rangle > 0$, en déduire que deg $P = n$ et que L_n admet n racines simples qui sont toutes dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

d. On note $\{x_k\}_{1 \leq n}$ (resp. $\{y_k\}_{1 \leq n+1}$) les racines de L_n (resp. L_{n+1}) rangées dans l'ordre croissant, Montrer en utilisant 7°.*b* que

$$0 < y_1 < x_1 < y_2 < \ldots < x_k < y_{k+1} < x_{k+1} < \ldots < x_n < y_{n+1}$$

Troisième Partie

Dans cette partie $\alpha > -1/2$ est fixé.

1°. Calculer $c_n = \langle e_\alpha, L_n \rangle$

2°. Calculer $\|e_\alpha\|$.

3°. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k$. Calculer $\|e_\alpha - S_n\|^2$.

Déterminer $\lim_{n\to\infty} S_n$ dans $(\mathcal{F}, \| \cdot \|)$.

Quatrième Partie

1°. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite reelle qui tend vers zéro. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} a_{n-k} = 0.$$

2°. Pour $t \in]-1, 1[$ et $m \in \mathbb{N}$, on définit la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$A_k = \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+k+1)}{k!} t^{m+k+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^k}{(1-ut)^{m+k+2}} du.$$

a. Montrer que, pour $u \in [0, 1]$, $1 - u < 1 - tu$. En déduire que $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$.

b. Montrer que $A_k = C_{m+k+1}^m t^{m+k+1} + A_{k+1}$.

c. En déduire que

$$\frac{t^m}{(1-t)^{m+1}} = A_n + \sum_{p=m}^{n+m} C_p^m t^p.$$

3°.

a. Montrer, en utilisant ce qui précède, que, pour $(t, x) \in]-1, 1[\times\mathbb{R}$, l'on a

$$\sum_{m=0}^{k} L_m(x) t^m = \frac{1}{1-t} \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{p!} \left(\frac{xt}{t-1}\right)^p - \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \frac{x^p}{p!} A_{k-p}.$$

b. Conclure que, pour $(t, x) \in]-1, 1[\times\mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n = \frac{1}{1-t} \exp\left(\frac{xt}{t-1}\right).$$

$\mathcal{FIN}$

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

La partie **III** *est indépendante des parties* **I** *et* **II**.

NOTATIONS

Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite réelle on désigne par $\prod_{k=0}^{+\infty} x_k$ la limite, lorsqu'elle existe, de $\left(\prod_{k=0}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Dans tout le problème u_n désigne, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$u_n(x) = x\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \mathrm{Log}\left(1+\frac{x}{n}\right).$$

Lorsque la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge on note $S(x)$ sa somme.

I

1°. Quel est l'ensemble de définition de S ? On notera D cet ensemble. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

2°. Calculer, pour $x \in D$, $S(x+1) - S(x)$.

3°. Dans les parties **I** et **IV** la fonction T sera définie sur D par: $T(x) = \exp[S(x)]$.

a. Montrer que T vérifie les propriétés suivantes:

$$T(0) = 1 \qquad (i)$$

$$\forall x \in D, \qquad T(x+1) = (x+1)T(x) \qquad (ii)$$

b. En déduire que:$\forall n \in \mathbb{N}, T(n) = n!$.

4°. Montrer que: $\forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T(x+n) = T(x)\prod_{k=1}^{n}(x+k)$.

5°.

a. Montrer que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{k}\right) - \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\right] = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \mathrm{Log}\,(n+1).$$

b. On pose $R_n(x) = S(x+n) - S(n) - x\mathrm{Log}\,(n+1)$. Montrer que $R_n(x)$ est le rest d'ordre n d'une série convergente (utiliser 5°.a). En déduire que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

c. On note $\varphi_n(x) = \dfrac{T(x+n)}{n!(n+1)^x}$. En déduire que:

$$\forall x \in D, \qquad \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = 1 \qquad (iii)$$

6°.

a. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}-\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]$ converge. On notera γ sa somme.

b. Montrer que, pour tout $x \in D$,

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{k^{1-x}(k+1)^x}{x+k}=e^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{x/k}}{1+x/k}.$$

c. En déduire que, pour tout $x \in D$,

$$T(x)=e^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}e^{x/k}\right].$$

II

On désigne, dans cette partie, par T une fonction continue dont l'ensemble de définition est D et vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii) de la partie **I**.

Le but de cette partie est de montrer que: $\forall\, x \in D, \quad T(x)=\exp[S(x)]$.

1°. Montrer que: $\forall\, x \in D, \quad T(x+n)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)T(x)$.

1°. En déduire que T et φ_n sont strictement positives sur D et que

$$\forall\, x \in D, \quad \operatorname{Log} T(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[x\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{k}\right)-\operatorname{Log}\left(1+\frac{x}{k}\right)\right]+r_n(x)$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n(x)=0$ pour tout x de D.

3°. En déduire que $\forall\, x \in D, \quad T(x)=\exp[S(x)]$.

4°. Quel résultat obtient-on en remplaçant dans l'hypothèse initiale de la partie **II**: "T une fonction continue", par: "T une fonction strictement positive".

III

Dans cette partie, on prend $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et on définit $\Phi_{n,x}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\Phi_{n,x}(t)=\begin{cases} t^x e^{-t} & \text{si} \quad t>n \\ \\ t^x\left(e^{-t}-(1-t/n)^n\right) & \text{si} \quad t \in [0,n] \end{cases}$$

1°. Étudier le signe de $t \mapsto e^{-t}-(1-t/n)^n$ sur $[0,n]$ et en déduire le signe de $\Phi_{n,x}$ sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\Phi_{n,x}(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

2°. On prend dans cette question $x=0$ et $n>1$.

a. On pose $g_n(t)=(n-1)\operatorname{Log}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)+t$. Étudier le signe de g_n sur $[0,n]$.

b. Montrer qu'il existe un élément a_n, et un seul, de $]1,n[$, tel que $\Phi'_{n,0}(a_n)=0$.

c. Donner un équivalent de $g_n(3)$ au voisinage de $+\infty$ et montrer que

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, n \geq N, \quad 1<a_n<3.$$

d. Étudier la convergence uniforme de la suite $(\Phi_{n,0})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.

3°. Étudier, à l'aide de **III.**1°. le signe de $\Phi'_{n,x}$ sur $[0,x]$ pour $x<n$.

4°. On prend dans cette question $x\geq 1$ et $n>x$, et on pose pour $t\in]x,n[$:

$$h_n(t)=\mathrm{Log}\left(t-x+\frac{tx}{n}\right)-\mathrm{Log}\,(t-x)+g_n(t).$$

a. Pour $t\in]x,n[$ calculer $h'(t)$ et montrer qu'il existe un élément b_n, et un seul, de $]x,n[$, tel que $h_n(b_n)=0$.

b. En déduire le signe de $\Phi'_{n,x}$ sur $\mathbb{R}_+\setminus\{n\}$.

c. Donner le tableau de variation de $\Phi_{n,x}$ sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que

$$\exists\, K\in\mathbb{N}:\quad \Phi_{n,x}(b_n)\leq K\frac{b_n^{x+2}}{n(b_n-x)}.$$

d. Donner un équivalent simple de $h_n(x+1)$ et de $h_n(x+3)$ quand n tend vers l'infini.

e. En déduire que la suite $(\Phi_{n,x})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

5°. On prend dans cette question $0<x<1$.

a. Comparer, pour $t\in[0,1]$, $\Phi_{n,x}(t)$ et $\Phi_{n,0}(t)$.

b. Comparer, pour $t\in[1,+\infty[$, $\Phi_{n,x}(t)$ et $\Phi_{n,1}(t)$.

c. En déduire que la suite $(\Phi_{n,x})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

IV

Les notations sont celles de parties **I** et **III**. En particulier: $x\in\mathbb{R}^+$, et $n\in\mathbb{N}^*$.

1°. Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\Phi_{n,x}(t)\,dt$.

2°.

a. Calculer $\displaystyle\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$ et exprimer le résultat sous la forme:

$$D_n(x)\prod_{k=1}^{n+1}\frac{e^{x/k}}{1+x/k}.$$

où D_n est une fonction à préciser.

b. Quelle est la limite de $D_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$? (On pourra utilise **I.**5°.*a* et **I.**6°.*a*).

c. En déduire la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Exprimer le résultat à l'aide de la fonction T de la partie **I**.

3°. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\Phi_{n,x}(t)\,dt=0$.

4°. En déduire que

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_+,\quad T(x)=\int_0^{+\infty}t^x\,e^{-t}\,dt.$$

$\mathcal{FIN}$

OMRAN KOUBA

Problème de Mathématiques

Les trois problèmes sont indépendants

PROBLÈME I

1°. Soit $\mathcal{D}_0$ l'ensemble des réels x pour lesquels la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ converge. On note $g(x)$ la somme de cette série lorsqu'elle converge. Déterminer $\mathcal{D}_0$. Donner, sur $]-1,1[$, l'expression de g à l'aide de fonctions élémentaires. (On pourrait penser à dériver).

2°. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des réels x pour lesquels la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2}$$

est définie.

a. Préciser l'ensemble $\mathcal{D}$. Soit I l'intervalle ouvert $]0,1[$; est-ce que la fonction f est définie et continue sur I ? est-ce qu'elle l'est sur $\overline{I}$?

b. Démontrer que cette fonction f est dérivable dans l'intervalle I. Donner l'expression de la fonction dérivée f' à l'aide de somme de séries. Est-ce que la dérivée f' est continue dans I ?

c. Donner l'expression de f' à l'aide de fonctions élémentaires. Est-ce que l'expression de f' admet une limite finie lorsque x tend vers 0 ou vers 1 ?

d. En supposant le résultat $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ connu, déduire des résultats précédents l'expression de f à l'aide de fonctions élémentaires.

3°. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Log}(x) \operatorname{Log}(1-x)\, dx$.

PROBLÈME II

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 4 ; soit e_1, e_2, e_3 et e_4 une base de cet espace.

1°. Soit $\mathcal{A}$ l'endomorphisme de E dont la matrice associée dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq 4}$ est:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $\mathcal{A}$ ainsi qu'une base de vecteurs propres ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4.

b. Soit H l'ensemble des endomorphismes $\mathcal{I}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^2$, et $\mathcal{A}^3$ où $\mathcal{I}$ est l'endomorphisme identité de E. Démontrer que H est un groupe pour loi de composition des endomorphismes. Est-ce que H possède un sous-groupe ?

2°. Soit $\mathcal{B}$ l'endomorphisme de E dont la matrice associée dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq 4}$ est:

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caratéristique P de cette matrice. Est-ce que l'endomorphisme $\mathcal{B}$ est inversible ?

b. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Exprimer $e^{-2i\alpha}P(e^{i\alpha})$ en fonction de $\cos(\alpha)$.

c. En déduire les quatre valeurs propres de l'endomorphisme $\mathcal{B}$. (On pourrait utiliser le fait $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ après l'avoir démontré). Prouver aussi l'existence de quatre vecteurs propres ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4.

d. Quelle est la matrice associée à l'endomorphisme $\mathcal{B}$ dans la base ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 ? En déduire l'existence et la valeur du plus petit entier k tel que $\mathcal{B}^k = \mathcal{I}$.

3°.

a. Soit $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux endomorphismes de E qui commutent. Démontrer que si λ est une valeur propre simple de $\mathcal{N}$ associée au vecteur propre ψ, ce vecteur ψ est aussi vecteur propre de $\mathcal{M}$.

b. Déduire des résultats précédents qu'il existe une base de vecteurs propres commune aux endomorphismes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Démontrer la relation $\mathcal{B}^6 = \mathcal{A}$.

PROBLÈME III

Préambule: On désigne par E_0 (resp. E_1) l'espace vectoriel des fonctions réelles continues (resp. de classe C^1) sur $[0, 1[$.

i. Soient f et g deux fonctions de E_0. Démontrer que si les intégrales $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^1 g^2(t)\,dt$ sont convergentes, alors il en est de même des intégrales suivantes:

$\int_0^1 |f(t)|\, dt$ et $\int_0^1 |f(t)\, g(t)|\, dt$. (On pourrait intégrer sur $[0, a]$ et appliquer une inégalité convenable pour montrer que les intégrales correspondantes sont majorées).

ii. Soit F la partie de E_1 formée des fonctions u telles que les intégrales $\int_0^1 u^2(t)\, dt$ et $\int_0^1 (1-t)[u'(t)]^2\, dt$ soient convergentes. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E_1.

Dans toute la suite on désigne par V le sous-espace vectoriel de F formé des fonctions u qui s'annulent en 0.

1°. Démontrer que l'application

$$(u, v) \mapsto \int_0^1 (1-t^2) u'(t)\, v'(t)\, dt$$

définit un produit scalaire sur V. On le désignera par $\langle\ .,.\ \rangle_V$ et on notera $\|\ .\ \|_V$ la norme associée.

2°. En remarquant que pour $u \in V$ on a, sur $[0, 1[$, $u(x) = \int_0^x u'(t)\, dt$, montrer que

$$\forall\, x \in [0, 1[, \quad |u(x)|^2 \leq \left(\frac{1}{2}\mathrm{Log}\, \frac{1+x}{1-x}\right) . \|u\|_V^2 \,.$$

3°. On considère l'espace vectoriel normé W obtenu en munissant V de la norme $\|\ .\ \|$ définie par

$$\|u\| = \left(\int_0^1 |u(t)|^2\, dt\right)^{1/2} .$$

a. Montrer que l'application identité I de $(V, \|\ .\ \|_V)$ dans W est continue.

b. Est-ce l'application réciproque I^{-1} est continue ? (On pourrait utiliser les fonctions polynômiales $x \mapsto x^n$).

4°. On désigne par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de V qui converge vers 0 au sens de $\|\ .\ \|_V$. Démontrer que cette suite converge simplement vers 0. Converge -t-elle également dans W ?

5°. On prend la suite définie par $u_n(x) = 1 - (1-x)^{1/n}$. vérifier que cette suite est bien dans V et qu'elle converge au sens de la norme $\|\ .\ \|_V$. Est-ce que la convergence est uniforme sur $[0, 1[$.

FIN

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction J, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par la relation:

$$J(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin\theta)\, d\theta. \tag{1}$$

Première Partie

Pour tout entier $n \geq 0$ on définit l'intégrale:

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^n\, d\theta. \tag{2}$$

1°. Montrer que la suite $(W_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et convergente. Montrer qu'elle vérifie la relation de récurrence: $nW_n = (n-1)W_{n-2}$ pour $n \geq 2$. (3)

2°. *a.* Déduire que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\geq 1}$ est constante.

b. Montrer qu'au voisinage de l'infini $W_n \sim W_{n-2}$ et $W_n \sim W_{n-1}$.

c. En déduire qu'au voisinage de l'infini $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

3°. Donner la valeur de W_{2n} et W_{2n+1} en fonction de n. (On exprimera ces valeurs à l'aide de factorielles).

Deuxième Partie

1°. Rappeler le développement en série entière de la fonction $t \mapsto \cos t$. En déduire que J admet un développement en série entière de la forme:

$$J(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^{2k}. \tag{4}$$

Exprimer les coefficients α_k à l'aide des W_{2k}. Préciser le rayon de convergence de cette série.

2°. Montrer alors que J est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle:

$$xy'' + y' + xy = 0. \tag{5}$$

3°. Déterminer toutes les solutions développables en série entière de l'équation (5).

Troisième Partie

Pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel x, on pose

$$K_n(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin\theta + \frac{n\pi}{2})\,(\sin\theta)^n\,d\theta \tag{6}$$

1°. Montrer que $K_n' = K_{n+1}$.

2°. Exprimer la dérivée $J^{(n)}$ à l'aide de K_n. Calculer $J^{(n)}(0)$.

3°. En déduire la majoration $\left|J^{(n)}(x)\right| \leq W_n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que peut-on en conclure pour la suite de fonctions $(J^{(n)})_{n\geq 0}$?

4°. En déduire que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left| J(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{J^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \right| \leq \frac{W_n}{n!}\ |x|^n\,. \tag{7}$$

5°. Pour tout réel $a > 1$, on pose $L(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\, J(x)\,dx.$ (8)

a. Justifier la convergence de l'intégrale $L(a)$.

b. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $L(a) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{J^{(k)}(0)}{a^{k+1}} + R_n(a).$ (9)

Déterminer un majorant de $R_n(a)$ et en déduire l'expression de $L(a)$ sous forme de la somme d'une série entière en la variable $\dfrac{1}{a}$.(On pourrait utiliser (7).)

c. Rappeler le développement en série entière de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ et en déduire la valeur de $L(a)$.

Quatrième Partie

1°. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que

$$\lim_{x\to\infty} \int_a^b f(t)\,\sin(xt)\,dt = 0. \tag{10}$$

2°. On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ existe et vaut $\dfrac{\pi}{2}$. On note $G(x) = \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt.$ Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad |G(x)| \leq \frac{2}{x}. \tag{11}$$

3°. Soit $a \in]0, \pi/2[$. Montrer l'inégalité

$$|J'(x)| \leq (\frac{\pi}{2} - a) + \left| \int_0^{\sin a} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\sin(xt)\,dt \right|.$$

En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} J'(x) = 0$.

4°. Montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{J'(x)}{x}$ existe et la calculer.

5°. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\int_0^x \frac{J'(t)}{t}\,dt = \int_0^{\pi/2} G(x\sin\theta)\sin\theta\,d\theta - \frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

où G est la fonction définie à la question 2° de cette partie.
En déduire que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{J'(t)}{t}\,dt$ converge, et calculer sa valeur.

6°. Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty J(t)\,dt$ converge, et calculer sa valeur.

CINQUIÈME PARTIE

On définit la fonction F, de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, par la relation: $F(x) = \sqrt{x}J(x)$. (13)

1°. Déduire de (5) une équation différentielle vérifiée par F, pour $x > 0$.

2°. Soit G la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $G(x) = \sin x$. En remarquant que $G'' + G = 0$, montrer que pour tout $x > 0$:

$$F''(x)G(x) - F(x)G''(x) = -\frac{F(x)\,G(x)}{4x^2}. \tag{14}$$

3°. En déduire que, pour tout entier $k > 0$,

$$F((k+1)\pi) + F(k\pi) = (-1)^{k+1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{F(x)\,\sin x}{4x^2}\,dx. \tag{15}$$

4°. Montrer que, si on suppose que F ne s'annule pas dans l'intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$ ($k \in \mathbb{N}^*$), la relation (15) entraîne une contradiction.Que peut-on conclure quant à l'existance de racines de l'équation $J(x) = 0$.

$\mathcal{FIN}$

OMRAN KOUBA

Problème de Mathématiques

Les parties **I**,**II** *et* **III** *sont indépendantes.*

I

Soit la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2(n+1)^2}.$$

1°. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établir brièvement les deux relations:

$$\int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}, \qquad \int_0^1 x^{n-1}\text{Log}\,x\,dx = -\frac{1}{n^2}.$$

2°. Déterminer une fonction f_n définie sur $]0,1]$ telle que $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

3°. Soit S_n la fonction définie sur $]0,1]$ par $S_n(x) = \sum_{p=1}^{n} f_p(x)$. Déterminer S_n puis la limite de $S_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini, x étant un réel de l'intervalle $]0,1]$.

4°. Soit U_n la somme des n premiers termes de la série de terme général u_n: $U_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$. Déterminer la limite de U_n lorsque n tend vers l'infini. En déduire une expression de $\text{Log}\,2$ sous la forme d'une somme de série. Combien de termes suffit-il de prendre pour avoir $\text{Log}\,2$ à 10^{-3} près ?

II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $f(t) = \int_0^\infty \varphi(t,u)\,du$, où φ est la fonction définie dans $\mathbb{R}^2$ par:

$$\varphi(t,u) = \frac{\sin(tu)}{u(1+u^4)}.$$

1°. Etablir que $f(t)$ est bien définie pour toute valeur de $t \in \mathbb{R}$. En montrant, pour $t \in \mathbb{R}$, la relation:

$$|f(t)| \leq |t| \int_0^\infty \frac{du}{1+u^4}$$

établir que la fonction f est continue en 0.

2°. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $\displaystyle\int_0^n \varphi(t,u)\,du$.

a. Etablir que cette fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur $[-a,a]$. Que peut-on conclure concernant la continuité de f.

3°. Quelle est la fonction dérivée f_n' de f_n ? Démontrer que la suite de fonctions (f_n') converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g ; préciser g. En déduire que f est une fonction dérivable. Quelle est sa dérivée f' ?

4°. Démontrer, de même, que les suites de fonctions (f_n'') et (f_n''') sont convergentes et ont pour limite des fonctions h et k. En déduire que f admet des dérivée f'' et f'''.

5°. Soit ρ_n la fonction définie par

$$\rho_n(t) = \int_0^n \frac{u^3 \sin(tu)}{1+u^4}\,du.$$

a. Vérifier que ρ_n est une fonction impaire, et que la suite (ρ_n) converge uniformément, vers une fonction ρ, sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,-a]$ avec $a > 0$. Préciser ρ.

b. En admettant que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$, démontrer, pour $t > 0$, la relation: $\rho(t) = \dfrac{\pi}{2} - f(t)$. Est-ce que ρ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$?

c. Déduire de ce qui précède que la fonction f est de classe C^4 sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

6°. Démontrer que f vérifie, sur $\mathbb{R}_+^*$, une équation différentielle simple de quatrième ordre. Résoudre cette équation, et en déduire f.

III

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On considère la fonction 2π-périodique f définie par

$$\forall\, x \in [-\pi,\pi[, \quad f(x) = \frac{\cos(ax)}{\sin(\pi a)} + \frac{\operatorname{ch}(ax)}{\operatorname{sh}(\pi a)}.$$

1°. Déterminer les coefficients de Fourier exponentielles $(C_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ de f.

2°. En déduire l'existence d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$, qu'on déterminera, telle que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos(nx)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3°. Calculer la somme des séries suivantes

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^4 - a^4}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^4 - a^4}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n^4 - a^4)^2}.$$

FIN

OMRAN KOUBA

Problème de Mathématiques

NOTATIONS

a. Pour n entier positif, on note C^n l'espace vectoriel des fonctions n fois continument dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; en particulier, C^0 désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. On note E^1 le sous-espace vectoriel de C^1 des fonctions f qui vérifient la relation: $f(0) = 0$.

c. Pour toute fonction f de C^0 et pour tout réel a positif, on note $M_a(f)$ le réel défini par:

$$M_a(f) = \text{Sup} \quad \{|f(x)| : \quad x \in [-a, +a]\}.$$

d. Soit u une fonction polynôme réelle, fixée une fois pour toutes, de degré $p > 1$, de terme de plus haut degré x^p et sans zéro réel.

PREMIÈRE PARTIE

1°. *a.* Si f appartient à C^0, montrer que l'application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}} \int_0^x \frac{f(\lambda)}{\sqrt{u(\lambda)}} \, d\lambda$$

appartient E^1 (donner toute les justifications nécessaires).

Montrer que l'application T de C^0 dans E^1 définie par $Tf = F$ est linéaire.

On conserve dans toute la suite la notation T. Comme E^1 est contenu dans C^0, la restriction de T à E^1 sera encore notée T ; on note donc usuellement, pour k entier naturel, T^k la composée $\underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{k \text{ fois}}$; en particulier, $T^0 = I$: l'identité.

b. Si f appartient à C^0, trouver une équation différentielle vérifiée par la fonction $F = Tf$ (la plus simple !).

c. Montrer que l'on a: $T(C^n) \subset C^{n+1}$ pour tout entier n.

d. Montrer l'existence d'un réel K positif tel que

$$\forall\, a > 0, \quad \forall\, f \in C^n, \qquad M_a(Tf) \leq K M_a(f).$$

Indication: Considérer la fonction w définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}} \int_0^x \frac{d\lambda}{\sqrt{u(\lambda)}}.$$

Montrer que cette fonction w est bornée (on distinguera le cas $p = 2$ et les cas $p > 2$).

2°. On définit l'application D de E^1 dans C^0 de la façon suivante: si g appartient à E^1, et x à $\mathbb{R}$, $Dg(x) = u(x)g'(x) + \dfrac{u'(x)}{2} g(x)$.

a. Vérifier que D est linéaire, et déterminer le noyau de D.

b. Se donnant un élément f de C^0, déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle:

$$uy' + \frac{u'}{2} y = f.$$

c. Après avoir montrer que D est un isomorphisme de E^1 sur C^0, expliciter D^{-1}.

Deuxième Partie

On se propose d'expliciter les composées T^n.

1°. Soient φ un élément de C^1, Ψ un élément de C^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit Φ_n la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par la relation:

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (\varphi(x) - \varphi(\lambda))^{n-1} \Psi(\lambda)\, d\lambda.$$

Montrer que Φ_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \Phi'_{n+1}(x) = \varphi'(x)\Phi_n(x).$$

2°. Si f appartient à C^0 et si n est un entier naturel, on définit la fonction g_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par: $g_n(x) = \sqrt{u(x)}\, T^n f(x)$.

a. Montrer qu'il vient:

$$\forall\, n \geq 1, \quad g_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u(x) g'_n(x) = g_{n-1}(x).$$

b. Dans toute la suite, la primitive, nulle en 0, de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$ sera noté v.

Montrer qu'il vient:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_2(x) = \int_0^x (v(x) - v(\lambda)) \frac{g_0(\lambda)}{u(\lambda)}\, d\lambda.$$

c. Plus généralement, montrer qu'il vient:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (v(x) - v(\lambda))^{n-1} \frac{g_0(\lambda)}{u(\lambda)}\, d\lambda.$$

3°. Déduire de ce qui précède une égalité explicite concernant $T^n f(x)$ $(n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R})$ faisant intervenir une intégrale définie. En désignant par m la borne inférieure de l'ensemble $u(\mathbb{R})$, montrer tout d'abord que m est strictement positif, puis démontrer la propriété:

$$\forall\, a > 0, \quad \forall\, f \in C^0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad M_a(T^n f) \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{a}{m}\right)^n M_a(f).$$

TROISIÈME PARTIE

Soit à résoudre l'équation:

$$f + Tf = g, \tag{E}$$

où g est une fonction donnée appartenant à C^0 et f une fonction inconnue qui sera supposée appartenir au moins à C^0.

1°. La fonction g est supposée dans cette question appartenir à C^1.

a. Montrer que si f est solution sur $\mathbb{R}$ de (E), f appartient à C^1 et est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle $(\mathcal{E})$.

b. Déterminer toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle $(\mathcal{E})$. On exprimera ces solutions sous forme intégrale.

c. Déduire de ce qui précède que l'équation (E) a une solution et une seule, que l'on demande d'expliciter en faisant intervenir une intégrale définie.

2°. On revient au cas général: g est une fonction de C^0.

a. Montrer que (E) admet au plus une solution.

b. Montrer que la série de fonctions de terme général $(-1)^n T^n g$ converge uniformément sur tout intervalle $[-a, +a]$; $a > 0$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T^n g(x).$$

Montrer que cette fonction f est continue et est solution de (E).

c. Montrer que cette même fonction f vérifie pour tout réel x:

$$f(x) = g(x) - \frac{e^{-v(x)}}{\sqrt{u(x)}} \int_0^x \frac{e^{v(\lambda)}}{\sqrt{u(\lambda)}}\, g(\lambda)\, d\lambda.$$

3°. *Application :* résoudre l'équation suivante où f est la fonction inconnue:

$$f(x) + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \int_0^x \frac{f(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2+1}}\, d\lambda = \frac{\operatorname{Arc\,tg} x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$\mathcal{FIN}$

OMRAN KOUBA

Problème de Mathématiques

PRÉAMBULE

Le but du problème est de démontrer que le problème différentiel suivant

$$\mathcal{P} : \quad \begin{cases} y'' + y = \dfrac{1}{t}, & \text{sur} \quad \mathbb{R}_+^* \\ \lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0. \end{cases}$$

admet une, et une seule, solution que nous allons noter φ. Nous dennerons deux expressions de φ et nous étudirons le comportement de φ et de φ' au voisinage de 0^+.

Montrer que le problème $\mathcal{P}$ admet au plus une solution.

PREMIÈRE PARTIE

Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$\varphi(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2}\, dx. \tag{1}$$

1°. Montrer que l'intégrale définissant $\varphi(t)$ est convergente pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

2°. Montrer que, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 < \varphi(t) < \dfrac{1}{t}$. Quelle est la limite de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

3°. Pour $(t, a) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, montrer que

$$0 < \varphi(0) - \varphi(t) < \frac{ta^2}{2} + \text{Arc tg}\, \frac{1}{a}. \tag{2}$$

En déduire que φ est continue en 0. (On pourra choisir a convenablement).

4°. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\varphi_n(t) = \int_0^{\infty} \frac{x^n e^{-tx}}{1+x^2}\, dx. \tag{3}$$

de telle manière que $\varphi = \varphi_0$.

a. Montrer que l'intégrale définissant $\varphi_n(t)$ est convergente pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

b. Soient $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in]-t_0/2, t_0/2[$. Montrer l'inégalité suivante:

$$|\varphi_n(t_0+h) - \varphi_n(t_0) + h\varphi_{n+1}(t_0)| \leq \frac{h^2}{2}\,\varphi_{n+2}(\frac{t_0}{2}). \tag{4}$$

(On pourra utiliser l'inégalité $|e^v - 1 - v| \leq \dfrac{v^2}{2}\,e^{|v|}$, valable pour tout réel v, après l'avoir démontrée).

c. En déduire que φ_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer φ_n' en fonction de φ_{n+1}.

d. Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Quelle relation y a-t-il entre $\varphi^{(n)}$ et φ_n.

e. Conclure que φ est l'unique solution de $\mathcal{P}$.

Deuxième Partie

Pour $t \geq 0$, on pose

$$\psi(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{t+x}\,dx. \tag{5}$$

1°. En utilisant une intégration par parties, montrer que l'intégrale définissant ψ est convergente, et que

$$\psi(t) = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{(t+x)^2}\,dx. \tag{6}$$

2°. En effectuant un changement de variable simple, montrer que

$$\psi(t) = \cos t \int_t^\infty \frac{\sin u}{u}\,du - \sin t \int_t^\infty \frac{\cos u}{u}\,du \tag{7}$$

3°. En déduire que ψ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\psi'' + \psi = 1/t$.

4°. En utilisant (6), montrer que $0 \leq \psi(t) \leq 2/t$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que ψ est une solution de $\mathcal{P}$.

5°. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\psi(t) = \varphi(t)$. Est-ce que $\psi(0) = \varphi(0)$? que vaut $\psi(0)$.

6°. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$\psi_n(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{(t+x)^{n+1}}\,dx. \tag{8}$$

a. Montrer que l'intégrale définissant $\psi_n(t)$ est convergente pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que

$$\psi_n(t) = \cos t \int_t^{\infty} \frac{\sin u}{u^{n+1}}\, du - \sin t \int_t^{\infty} \frac{\cos u}{u^{n+1}}\, du \tag{9}$$

c. En déduire que ψ_n est de classe C^1 et que $\psi_n' = -(n+1)\psi_{n+1}$.

d. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$n! \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{(t+x)^{n+1}}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{x^n e^{-tx}}{1+x^2}\, dx.$$

e. En déduire que

$$\forall\, n \geq 1, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left|\varphi^{(n)}(t)\right| \leq \frac{(n-1)!}{t^n}. \tag{10}$$

7°. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(2k)!}{t^{2k+1}} + (-1)^n \varphi^{(2n)}(t).$$

puis que

$$\left| \varphi(t) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(2k)!}{t^{2k+1}} \right| \leq \frac{(2n-1)!}{t^{2n}}.$$

(On pourrait utiliser que $(1+x^2) \sum_{k=0}^{n-1} (-x^2)^k = 1 - (-x^2)^n$).

Troisième Partie

1°. Soit $u \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\varphi'(u) - \operatorname{Log} u = \varphi'(1) + \int_u^1 \varphi(t)\, dt.$$

2°. En déduire que $\lim_{u \overset{>}{\to} 0} \varphi'(u) - \operatorname{Log} u = \varphi'(1) + \int_0^1 \varphi(t)\, dt$. Dans la suite on note $\gamma = \varphi'(1) + \int_0^1 \varphi(t)\, dt$.

3°. Montrer que

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x} - e^{-1/x}}{x}\, dx = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x}\, dx - \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx. \tag{11}$$

4°. Montrer que l'on a

$$\varphi'(u) = \operatorname{Log} u + \gamma - \frac{\pi}{2}u + \int_0^u (\varphi(0) - \varphi(t))\, dt.$$

En déduire qu'au voisinage de 0^+.

$$\varphi'(u) = \operatorname{Log} u + \gamma - \frac{\pi}{2}u + o(u).$$

Trouver un développement similaire pour φ.

5°. On se propose dans cette question de démontrer que γ est la constante d'Euler. Pour $n \geq 1$ et $t \in [0, n]$, on pose $e_n(t) = (1 - t/n)^n$.

a. En utilisant l'inégalité $1 + v \leq e^v$, qui est valable sur $\mathbb{R}$, montrer que,pour $t \in [0, n]$,

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq e_n(t) \leq e^{-t}.$$

b. En déduire que,pour $t \in [0, n]$,

$$0 \leq e^{-t} - e_n(t) \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}. \tag{12}$$

c. En intégrant $\sum_{k=0}^{n-1} (1 - v)^k$ sur $[0, 1]$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} = \int_0^n \frac{1 - e_n(t)}{t}\, dt.$$

d. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \operatorname{Log} n = \int_0^1 \frac{1 - e_n(t)}{t}\, dt - \int_1^n \frac{e_n(t)}{t}\, dt. \tag{13}$$

e. En utilisant (12) et (13) conclure que

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \operatorname{Log} n \right) = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x}\, dx - \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx = \gamma.$$

$\mathcal{FIN}$

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

Approximation rationnelle de la fonction exponentielle.

Soit $(Q_n)_{n\geq 0}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\begin{cases} Q_0(X) &= 1, \\ Q_1(X) &= 1+X, \\ Q_{n+1}(X) &= Q_n(X) + \dfrac{X^2}{4n^2-1} Q_{n-1}(X), \qquad \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

1°. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{R}_+$.

2°. Que valent $Q_n(0)$ et $Q'_n(0)$? Calculer Q_2, Q_3.

3°. Pour $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$V_n(x) = \frac{1}{2}\left[Q_n(-x)\, e^x - Q_n(x)\, e^{-x}\right].$$

a. Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(V_n)_{n\geq 0}$. Expliciter V_0, V_1 et V_2. Montrer que V_n est une fonction impaire infiniment dérivable, et calculer $V'_n(0)$.

b. Montrer que, pour tout $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $V'_{n+1}(x) = -\dfrac{x}{2n+1} V_n(x)$.

4°. Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, On pose

$$W_n(x) = \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^x (t^2 - x^2)^{n-1} t \operatorname{sh} t \, dt.$$

a. Montrer que, pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, $W'_{n+1}(x) = -\dfrac{x}{2n+1} W_n(x)$.

b. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $W_n = -V_n$.

c. Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{2}\left|Q_n(-x)\,e^{x} - Q_n(x)\,e^{-x}\right| \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!}\left|\operatorname{sh} x\right|.$$

5°. Montrer que, pour tout $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\left|e^{-x} - \frac{Q_n(-x/2)}{Q_n(x/2)}\right| \leq \frac{x^{2n}}{2^{2n}(2n)!}.$$

6°. *a*. Montrer que, pour $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, On a

$$V_{n+1}(x) = V_n(x) - \frac{x}{2n+1}V_n'(x).$$

En déduire que $xV_n''(x) - 2nV_n'(x) - xV_n(x) = 0$.

b. Soient P et R deux polynômes à coefficients réels tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $P(x)e^{x} - R(x)e^{-x} = 0$. Montrer que $P = R = 0$.

c. En déduire que le polynôme Q_n vérifie

$$XQ_n'' - 2(X+n)Q_n' + 2nQ_n = 0$$

d. En posant $Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} X^k$. Trouver une relation simple entre $\lambda_{k+1}^{(n)}$ et $\lambda_k^{(n)}$. En déduire une expression explicite de $\lambda_k^{(n)}$.

e. Montrer que, si l'on pose,

$$D_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n-k)!}{(n-k)!\,k!}X^k$$

alors, D_n est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{N}^*$, qui vérifie

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad \left|e^{-x} - \frac{D_n(-x)}{D_n(x)}\right| \leq \frac{1}{(2n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

$\mathcal{FIN}$

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

EXERCICE .1 On donne la matrice:

$$M = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & 7 \\ 7 & -3 & -1 & 1 \\ -3 & 7 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Montrer que M est diagonalisable, et déterminer une matrice P inversible, et une matrice D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$. Expliciter P^{-1}.

EXERCICE .2 On suppose que n est un entier *impair*. Montrer qu'il n'existe pas de matrice A réelle, carrée d'ordre n et telle que $A^2 + A + I = 0$.

EXERCICE .3 Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt$ est convergente et calculer sa valeur.

EXERCICE .4 On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\operatorname{Log}\left|1 + x^2 - 2x^3\right|}{x^2}.$$

Quel est le domaine de définition de f ? Etudier le comportement de f aux bornes des intervalles de définition. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ converge et calculer la valeur de I.

PROBLÈME

Dans ce problème on se propose d'étudier la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ avec

$$a_n = \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n^\alpha}.$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$, et $E(x)$ la partie entière de x.

1°. *a*. Montrer que

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} (-1)^{E(\sqrt{k})} = (-1)^p(2p+1).$$

b. Montrer que

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{m^2-1} (-1)^{E(\sqrt{k})} = (-1)^{m-1}m.$$

(On pourrait distinguer deux cas suivant la parité de m).

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $m = E(\sqrt{n}\,)$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{E(\sqrt{k})} = (-1)^m(n - m^2 - m + 1).$$

d. En déduire,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{E(\sqrt{k})}\right| \leq E(\sqrt{n}\,). \tag{$*$}$$

2°. On pose $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{E(\sqrt{k})}$. Montrer que, pour $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{A_n}{(n+1)^\alpha} - A_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) A_k$$

En déduire que, si $\alpha > \dfrac{1}{2}$, alors $\sum a_n$ converge.

3°. On suppose que $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$, Montrer que,

$$(-1)^p \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} a_k \geq 2p^{1-2\alpha}$$

Que peut-on conclure ? justifier votre réponse.

$\mathcal{FIN}$

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

Soit λ un réel n'appartenant pas à $\mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ nous posons

$$u_n(\lambda) = \int_0^{\pi} \cos(\lambda x)\cos(nx)\,dx$$

1°. Calculer $u_n(\lambda)$, et en déduire que la série de terme général $u_n(\lambda)$ est convergente.

2°. Soit $C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos kx$ pour $n \geq 1$. Montrer que pour des valeurs de x qui seront précisées, il existe des rationnels A et B tels que $C_n(x) = A + B\dfrac{\sin\left((n+1/2)x\right)}{\sin(x/2)}$.

3°. Soit Φ l'application définie par

$$\Phi : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : \Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\lambda x) - 1}{\sin(x/2)} & \text{si} \quad x \in]0,\pi] \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Montrer que Φ est continuement dérivable sur $[0,\pi]$.

4°. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(\lambda) = -\frac{\sin\lambda\pi}{2\lambda} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \Phi(x)\,\sin\left((n+\frac{1}{2})\,x\right)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left((n+1/2)x\right)}{\sin(x/2)}\,dx. \quad (1)$$

5°. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la première intégrale de la relation (1) a une limite lorsque n tend vers l'infini.

6°. Calculer la seconde intégrale de la relation (1).

7°. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda(-1)^{n-1}}{n^2 - \lambda^2} = \frac{\pi}{\sin\pi\lambda} - \frac{1}{\lambda}$.

II

Soit $\alpha \in]1, +\infty[$. Posons $g(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$, et $J(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

1°. Montrer la convergence de l'intégrale définissant $J(\alpha)$.

2°. Donner l'expression du réel $J(\alpha)$ en fonction de $g(\alpha)$ et de $\dfrac{1}{\alpha-1}\, g\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)$.

3°. Montrer, pour $t \in [0,1]$, la relation

$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{\alpha k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}$$

Déterminer lorsque n tend vers $+\infty$ la limite de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\, dt$.

4°. En déduire une expression de $g(\alpha)$ comme somme de série.

5°. En utilisant les résultats précédents, Montrer que $J(\alpha)$ s'exprime simplement à l'aide de $\dfrac{\pi}{\alpha}$ et de $\sin \dfrac{\pi}{\alpha}$. Déterminer cette expression.

III

Soit toujours $\alpha \in]1, +\infty[$. Pour un réel x nous considérons

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \qquad f_\alpha(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\, dt.$$

1°. Préciser les ensembles de définition des fonctions Γ et f_α.

2°. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1)$ s'exprime en fonction de x et de $\Gamma(x)$.

3°. Montrer que la fonction f_α est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

4°. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\forall\, x > 0, \qquad 0 \leq f_\alpha(0) - f_\alpha(x) \leq (1 - e^{-xA^\alpha}) f_\alpha(0) + \int_A^\infty \frac{dt}{1+t^\alpha}.$$

En déduire que f_α est continue en 0.

5°. Soit $\eta \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\forall\, x > 0, \qquad 0 \leq f_\alpha(x) \leq \eta + f_\alpha(0)\, e^{-x\eta^\alpha}.$$

En déduire que $f_\alpha(x)$ tend vers une limite lorsque x tend vers l'infini. Déterminer cette limite.

6°. Soient $b \in \mathbb{R}_+^*$, et $h \in]-b/2, b/2[$. Montrer, en justifiant l'existence des intégrales considérées, que

$$\left| f_\alpha(b+h) - f_\alpha(b) + h\int_0^\infty \frac{t^\alpha\, e^{-bt^\alpha}}{1+t^\alpha}\, dt \right| \leq \frac{h^2}{2}\int_0^\infty \frac{t^{2\alpha}\, e^{-bt^\alpha/2}}{1+t^\alpha}\, dt$$

(On pourrait utiliser l'inégalité $|e^y - 1 - y| \leq \dfrac{y^2}{2} e^{|y|}$ après l'avoir démontré). En déduire que f_α est dérivable sur $]0,+\infty[$, quelle est l'expression de la dérivée ?

7°. Montrer que

$$\forall\, x > 0, \qquad f'_\alpha(x) - f_\alpha(x) = -\int_0^\infty e^{-xt^\alpha}\, dt. \tag{2}$$

Exprimer $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt^\alpha}\, dt$ au moyen de x et de $\Gamma(1+\dfrac{1}{\alpha})$.

8°. Montrer qu'il existe une application $\mu :]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x > 0, \qquad f_\alpha(x)\, e^{-x} + \Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\int_0^x t^{-1/\alpha}\, e^{-t}\, dt = \mu(\alpha).$$

9°. Montrer, en utilisant **III**.5°, que l'on a

$$\forall\, x > 0, \qquad f_\alpha(x)\, e^{-x} = \Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\int_x^\infty t^{-1/\alpha}\, e^{-t}\, dt \tag{3}$$

10°. En utilisant la relation (3) et les résultat établis ci-dessus montrer

$$\forall\, p \in]0,1[, \qquad \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

Que vaut $\Gamma(1/2)$?

$\mathcal{FIN}$

OMRAN KOUBA

Problème de Mathématiques

Problème I

Dans ce problème on se propose d'étudier la fonction F définie par

$$F(a) = \int_0^1 \frac{\operatorname{Log}(1 - 2x\cos a + x^2)}{x}\, dx$$

1°. Montrer que l'intégrale définissant $F(a)$ converge pour tout $a \in \mathbb{R}$. Préciser la parité et la périodicité de F

2°. Soit $a \in [0, 2\pi[$ fixé, on considère $g(x) = \operatorname{Log}(1 - 2x\cos a + x^2)$.

a. Développer la fonction $x \mapsto g(x)$ en série entière au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence de la série obtenue ?

b. Exprimer sous forme de somme d'une série entière l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{g(t)}{t}\, dt$ pour $|x| < 1$.

c. Déduire, en justifiant soigneusement, que $\displaystyle F(a) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na}{n^2}$.

3°. Soit h la fonction 2π-périodique qui coïncide avec $x \mapsto \dfrac{\pi^2 - 3(x-\pi)^2}{6}$ sur $[0, 2\pi[$.

a. Montrer que h est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Représenter h graphiquement.

b. Écrire la série de Fourier de h.

c. Donner une expression simple de $F(a)$ pour $a \in [0, 2\pi[$.

d. Calculer

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{\operatorname{Log}(1-x)}{x}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{\operatorname{Log}(1+x+x^2)}{x}\, dx.$$

PROBLÈME II

Dans ce problème D_r désigne l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2k)$ désigne la somme de la série de Riemann $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$.

On se propose de développer en série entière les fonctions F, G et H définies par

$$F(z) = \operatorname{tg} z, \quad \text{si} \quad z \in D_{\pi/2}$$

$$H(z) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad z = 0 \\ \dfrac{z}{\operatorname{tg} z} & \text{si} \quad z \in D_\pi \end{cases}, \quad G(z) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad z = 0 \\ \dfrac{z}{\sin z} & \text{si} \quad z \in D_\pi \end{cases}.$$

1°. *a.* Soit $z \in D_1 \setminus \{0\}$. On note λ la fonction 2π-périodique qui coïncide avec $x \mapsto \cos zx$ sur $[-\pi, \pi[$. En développant la fonction λ en série de Fourier montrer que,

$$\frac{\pi z \cos \pi z}{\sin \pi z} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 - z^2}.$$

b. Montrer que,

$$\forall\, z \in D_1,\ \forall\, n \geq 1,\ \forall\, m \geq 2, \qquad \left| \frac{z^2}{n^2 - z^2} - \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{z^2}{n^2} \right)^k \right| \leq \frac{|z|^{2m}}{(1 - |z|^2) n^{2m}}.$$

c. En déduire que,

$$\forall\, z \in D_1,\ \forall\, m \geq 2, \qquad \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2 - z^2} - \sum_{k=1}^{m-1} \zeta(2k)\, z^{2k} \right| \leq \frac{|z|^{2m}}{1 - |z|^2}\, \zeta(2).$$

2°. En utilisant ce qui précède, montrer que la fonction H est développable en série entière au voisinage de 0. Donner ce développement en utilisant $(\zeta(2k))_{k\geq 1}$, en précisant le rayon de convegence de la série obtenue et le domaine de validité de ce développement.

3°. Simplifier l'expression $H(z) - H(2z)$ pour $z \in D_{\pi/2}$, et l'expression $2H(z/2) - H(z)$ pour $z \in D_\pi$. En déduire que

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2^{2n} - 1)}{\pi^{2n}}\, \zeta(2n)\, z^{2n-1}. \qquad G(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - 2^{1-2n})}{\pi^{2n}}\, \zeta(2n)\, z^{2n}.$$

On précisera les domaines de validité de ces développements.

4°. En utilisant les développements en série entière de F et de H, trouver une relation simple entre $(2^{2n}-1)\zeta(2n)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(2^{2k}-1)\zeta(2k)\,\zeta(2n-2k)$ pour $n \geq 2$.

5°. Dans cette question, on pose $a_n = \dfrac{2(2^{2n}-1)\,(2n-1)!}{\pi^{2n}}\,\zeta(2n)$, pour $n \geq 1$.

a. Exprimer de deux manières la série entière de la fonction $z \mapsto F(z)\cos z$. En déduire que

$$\forall\, n \geq 0, \qquad 1 = \sum_{k=1}^{n+1} C_{2n+1}^{2k-1}(-1)^{k-1}a_k.$$

b. Que vaut a_1 ? Trouver une relation de récurrence permettant de calculer a_{n+1} en fonction de $(a_k)_{1\leq k\leq n}$.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n est un entier naturel plus grand ou égal à 1. Calculer a_2, a_3, a_4 et a_5.

d. Donner la valeur de $\zeta(2k)$ pour $1 \leq k \leq 5$. Les rationnels apparaissant dans les résultats devraient être sous forme irréductible.

$\mathcal{FIN}$

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

Ce problème a pour objet l'étude de certaines solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' = xy \qquad (E)$$

Dans la partie **I**, on montre que toutes les solutions réelles de (E) sont développables en série entière.

La partie **II** est consacrée à l'étude du comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$ d'une solution de (E) définie au moyen d'une représentation intégrale.

Dans la pertie **III**, en comparant l'équation (E) à une autre dont les solutions sont connues, on décrit le comportement oscillatoire des solutions de (E) dans $]-\infty, 0[$.

Ces trois parties sont largement indépendantes, on peut admettre le résultat d'une question pour répondre à une autre à condition que ce soit exprimé explicitement.

I

Dans cette partie nous définissons les deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$) par

$$\alpha_0 = \beta_0 = 1, \quad \text{et, pour } n \geq 1, \quad \alpha_n = \prod_{k=1}^{n}(k - \frac{1}{3}), \qquad \beta_n = \prod_{k=1}^{n}(k + \frac{1}{3}).$$

1°. Montrer qu'il existe une et une seule suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la fonction $x \mapsto A(x)$ somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{3n}$ soit solution de (E) vérifiant $A(0) = 1$, et $A'(0) = 0$. On précisera le rayon de convergence de cette série et l'on exprimera a_n en fonction de n et de α_n.

2°. Montrer qu'il existe une et une seule suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la fonction $x \mapsto B(x)$ somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{3n+1}$ soit solution de (E) vérifiant $B(0) = 0$, et $B'(0) = 1$. On précisera le rayon de convergence de cette série et l'on exprimera b_n en fonction de n et de β_n.

3°. Soit $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Donner la dimension et une base de $\mathcal{S}$. Montrer que toutes les solutions de (E) sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

II

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, nous considérons

$$J(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt^2} \cos\left(\frac{t^3}{3}\right) dt, \qquad K(x) = \int_0^{\infty} t\, e^{-xt^2} \sin\left(\frac{t^3}{3}\right) dt$$

1°. *a.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\lambda_n = \displaystyle\int_0^{\infty} t^n e^{-t^2}\, dt$. Montrer que, pour tout n, l'intégrale λ_n converge.

Trouver une relation de récurrence entre λ_n et λ_{n-2} pour $n \geq 2$. En déduire la valeur de λ_n. (On admettra que $\lambda_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$).

b. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\Lambda_n(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^n e^{-xt^2}\, dt$. Que vaut $\Lambda_n(x)$?

2°. Déduire de ce qui précède que, pour tout $x > 0$, les intégrales $J(x)$ et $K(x)$ sont convergentes.

3°. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, Montrer que, pour tout $h \in]-x/2, x/2[$,

$$\left| J(x+h) - J(x) + h \int_0^{\infty} e^{-xt^2} t^2 \cos\left(\frac{t^3}{3}\right) dt \right| \leq \frac{h^2}{2} \Lambda_4\left(\frac{x}{2}\right).$$

En déduire que J est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Trouver une relation simple entre $J'(x)$ et $K(x)$.

4°. En utilisant une méthode similaire montrer que K est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Puis, en effectuant des intégrations par parties, montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad K'(x) + J(x) + 2xJ'(x) = 0$$

5°. En déduire que J est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad J''(x) - (4x^2 + \frac{1}{x})J'(x) - 2xJ(x) = 0$$

▽ Dans Toute la suite de cette partie, nous posons, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $I(x) = J(\sqrt{x})$.

6°. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, calculer, en utilisant ce qui précède, $I''(x) - 2\sqrt{x}I'(x)$. En déduire une équation différentielle $(\widetilde{E})$ vérifiée par I sur $\mathbb{R}_+^*$.

7°. *a.* Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, nous définissons $W(x) = \exp(-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\,)I(x)$. Montrer que W est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que W est une fonction bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Soit y une solution de (E) qui est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = cW(x)$.

8°. *a*. En majorant: $\displaystyle\int_0^{\infty} \exp(-\sqrt{x}t^2)\left|\cos(\frac{t^3}{3})-1\right| dt$, déterminer un équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b. Plus généralement, déterminer un nombre réel λ et une suite $(\delta_k)_{k\geq 0}$ tels que, au voisinage de $+\infty$, et quel que soit l'entier $n>0$, la différence: $\left|I(x)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\delta_k}{x^{(6k+1)\lambda}}\right|$ soit majorée par $\dfrac{|\delta_{n+1}|}{x^{(6n+7)\lambda}}$.

III

Pour $x \in]-\infty,0[$, on considère la fonction Z définie sur $]-\infty,0[$ par:

$$Z(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{-x}}\cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{-x^3}\right).$$

1°. Déterminer explicitement une suite strictement décroissante $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $]-\infty,0[$ telle que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, l'on a

$$Z(x_k)=0, \quad \text{et} \quad \forall\, x \in]x_{k+1},x_k[, \quad Z(x)\neq 0.$$

2°. Déterminer pour tout $k\in\mathbb{N}$ le signe de $(-1)^k Z'(x_k)$ et le signe de $(-1)^{k-1}Z(x)$ pour $x\in]x_{k+1},x_k[$.

3°. Montrer que Z vérifie sur $\mathbb{R}_-^*$ l'équation différentielle: $Z''=\left(x+\dfrac{5}{16x^2}\right)Z$.

4°. Soit Y une solution de (E) sur $]-\infty,0[$. Définissons, pour $x\in\mathbb{R}_-^*$,

$$\Delta(x)=Z'(x)Y(x)-Y'(x)Z(x).$$

a. Montrer que, pour tout α et β tels que $\alpha<\beta<0$, nous avons

$$\Delta(\beta)-\Delta(\alpha)=\frac{5}{16}\int_\alpha^\beta \frac{Y(x)Z(x)}{x^2}\,dx.$$

b. Soit $k\in\mathbb{N}$ fixé. On suppose que Y est strictement positive sur $]x_{k+1},x_k[$. Trouver le signe de $(-1)^k(\Delta(x_k)-\Delta(x_{k+1}))$ de deux manières différentes, et en déduire une contradiction.

b. Déduire de ce qui précède que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe $t_k\in]x_{k+1},x_k[$ tel que $Y(t_k)=0$. Que peut-on en déduire sur le nombre de zéros de Y sur $]-\infty,0[$?

FIN

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

EXERCICE .1 Soit (C) le cercle représenté paramétriquement par $\theta \mapsto M(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$, pour $\theta \in \mathbb{R}$. Soient les deux points $M(\theta) \in (C)$ et $M'(-2\theta) \in (C)$.

1°. Déterminer l'enveloppe de la famille de droites (MM') lorsque θ parcourt $\mathbb{R}$. (On donnera une représentation paramétrée de cette enveloppe).

2°. Montrer que (MM') est tangente à son enveloppe au point symétrique de M' par rapport à M.

EXERCICE .2 Intégrer le système différentiel suivant

$$\begin{array}{ccccccc} x' & = & 2x & + & y & + & t \\ y' & = & 2y & + & 4z & + & 1 \\ z' & = & x & - & z & & \end{array}$$

avec la condition initiale $x(0) = -1, y(0) = 0, z(0) = 1$.

EXERCICE .3 • Pour $(\alpha, \beta, R) \in (\mathbb{R}_+)^3$, nous posons

$$J(\alpha, \beta, R) = \int_0^R e^{-\alpha x^2} \cos(\beta x^2)\, dx, \qquad K(\alpha, \beta, R) = \int_0^R e^{-\alpha x^2} \sin(\beta x^2)\, dx.$$

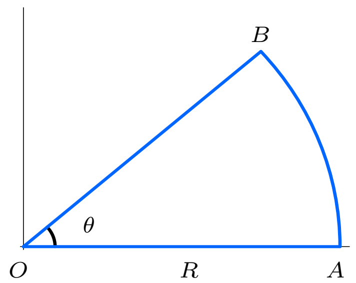
• Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nous définissons

$$P(x, y) = e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2), \qquad Q(x, y) = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2).$$

et les deux formes différentielles

$$\omega_1(x, y) = P(x, y)\, dx - Q(x, y)\, dy \quad \text{ et } \quad \omega_2(x, y) = Q(x, y)\, dx + P(x, y)\, dy.$$

• Pour $\theta \in]0, \pi/4]$ et $R > 0$, nous définissons la courbe simple de classe C^1 par morceaux, $\Gamma(R, \theta)$ qui est réunion de trois arcs: $\overset{\frown}{OA}$ le segment de droite joignant l'origine O au point A_R, (ou simplement A), de coordonnées $(R, 0)$, $\overset{\frown}{AB}$ l'arc du cercle, de centre O et de rayon R, joignant A au point $B_{R,\theta}$, (ou simplement B), de coordonnées $(R\cos\theta, R\sin\theta)$, et enfin $\overset{\frown}{BO}$ le segment de droite joignant B à l'origine O.



• Enfin nous admettrons que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1°. Est-ce que les deux formes différentielles ω_1 et ω_2 sont fermées sur $\mathbb{R}^2$? Que peut-on en conclure concernant la valeur de $\int_{\Gamma(R,\theta)} \omega_1$ et celle de $\int_{\Gamma(R,\theta)} \omega_2$?

2°. Calculer $\int_{\overset{\frown}{OA}} \omega_1$ en fonction de $J(0,1,R)$ et $\int_{\overset{\frown}{OA}} \omega_2$ en fonction de $K(0,1,R)$.

3°. Calculer $\int_{\overset{\frown}{OB}} \omega_1$ et $\int_{\overset{\frown}{OB}} \omega_2$ en fonction des intégrales

$$J(\sin 2\theta, \cos 2\theta, R) \quad \text{et} \quad K(\sin 2\theta, \cos 2\theta, R).$$

4°. *a*. Pour $i = 1, 2$, on pose $H_i(R,\theta) = \int_{\overset{\frown}{AB}} \omega_i$. Montrer que

$$|H_i(R,\theta)| \leq R \int_0^\theta e^{-R^2 \sin(2t)}\, dt, \qquad (i \in \{1,2\})$$

(Il y a deux démonstrations à faire).

b. Montrer que $\forall\, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \geq \frac{2x}{\pi}$. En déduire que $|H_i(R,\theta)| \leq \frac{\pi}{4R}$, pour les valeurs $i = 1, 2$.

5°. *a*. En utilisant ce qui pécède montrer que, pour $i = 1, 2$,

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\overset{\frown}{OA}} \omega_i - \int_{\overset{\frown}{OB}} \omega_i \right| = 0. \tag{$*$}$$

b. Que vaut $\lim_{R\to\infty} J(1,0,R)$?

c. En prenant $\theta = \frac{\pi}{4}$, et en utilisant $(*)$ montrer que les deux limites $\lim_{R\to\infty} J(0,1,R)$ et $\lim_{R\to\infty} K(0,1,R)$ existent et sont égales. Donner leur valeur commune σ.

d. En prenant $\theta \in]0, \frac{\pi}{4}[$, montrer que les limites suivantes $\lim_{R\to\infty} J(\sin 2\theta, \cos 2\theta, R)$ et $\lim_{R\to\infty} K(\sin 2\theta, \cos 2\theta, R)$ existent et les calculer.

6°. En déduire, pour $x \geq 0$, la valeur de

$$\int_0^\infty e^{-xt^2} \cos(t^2)\, dt, \quad \text{et de} \quad \int_0^\infty e^{-xt^2} \sin(t^2)\, dt$$

$\mathcal{FIN}$

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

L'objet du problème est l'étude des valeurs propres et des vecteurs propres d'un opérateur différentiel considéré d'abord dans un espace de polynômes puis dans certains espaces de fonctions.

I

Soit n un entier donné, $n \geq 2$, et soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. À tout nombre réel α, on associe l'application T_α définie dans $\mathbb{R}_n[X]$ par:

$$T_\alpha(P)(X) = X(X-1)P''(X) + (1+\alpha X)P'(X).$$

1°. *a.* Démontrer que T_α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Pour $n = 3$, déterminer la matrice A_α associée à T_α dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, en déduire les valeurs propres de T_α.

c. Déterminer la matrice A_α asociée à T_α dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire les valeurs propres de T_α ; exprimer ces $n+1$ valeurs propres $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n}$ en fonction de α et de l'entier k.

d. Pour le cas où $n = 3$, déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α admet des valeurs propres doubles.

e. Donner une condition nécessaire sur α pour qu'il existe deux valeurs propres λ_k et λ_ℓ égales (pour $k < \ell$).

f. Le réel α est supposé égal à $-(2q+1)$, où q est entier tel que $0 < 2q+1 < 2n-2$. Déterminer les valeurs des entiers k et ℓ, $(k < \ell)$, pour lesquelles $\lambda_k = \lambda_\ell$. Déterminer pour chacune de ces valeurs du nombre α, l'ensemble des valeurs propres distinctes en précisant la multiplicité de chacune d'elles.

2°. *a.* Déterminer la dimension du noyau et celle de l'espace image de T_α, lorsque α n'est pas un entier de l'intervalle $[1-n, 0]$. Préciser le noyau.

b. Déterminer le noyau de T_α lorsque α vaut 0, puis -1.

c. Est-ce que la matrice A_α est diagonalisable lorsque α vaut 0 ou -1 ?

d. On suppose que $n > 3$ et que α est égal à un entier $1-p$, avec $3 \leq p \leq n$. Déterminer un polynôme Q de degré q, $(0 \leq q \leq n)$, solution de l'équation $T_\alpha(Q) = 0$. En déduire le noyau de T_α et préciser sa dimension.

3°. *a.* On reprend l'exemple $n = 3$, chercher, dans chacun des cas $\alpha = -1$ et $\alpha = -4$, les polynômes vecteurs propres de T_α.
La matrice A_α est-elle diagonalisable pour $\alpha = -4$?

b. Soit λ_p, $(1 \leq p \leq n)$ une valeur propre simple différente de zéro de T_α, déterminer les coefficients d'un polynôme P vecteur propre de T_α associé à la valeur propre λ_p.

II

Soit $\mathcal{A}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles, définies dans $]-1,1[$ et qui sont sommes de séries entières convergentes dans cet intervalle. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on considère U_α l'endomorphisme défini dans $\mathcal{A}$ par la relation:

$$U_\alpha(f)(x) = x(x-1)f''(x) + (1+\alpha x)f'(x).$$

1°. Soit λ un réel. Démontrer qu'il existe des fonctions $S = \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p \in \mathcal{A}$ telles que $U_\alpha(S) = \lambda S$.
Il y aura lieu d'établir les relations vérifiées par les coefficients $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et de préciser le rayon de convergence de la série obtenue.
Préciser la dimension de l'espace vectoriel des solutions obtenues. (On discutera suivant les valeurs de λ).
À quelle condition sur α et λ, la fonction S est-elle un polynôme ?

2°. Comparer les valeurs propres de l'endomorphisme U_α de $\mathcal{A}$ aux valeurs propres de T_α dans $\mathbb{R}_n[X]$, ainsi que les dimensions des sous-espaces propres associée.

III

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$.Nous considérons V_α l'application linéaire définie dans l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des fonctions réelles de classe C^2 définies dans $]0,1[$ à valeurs dans l'espace vectoriel des fonctions continues définies dans $]0,1[$, telle que:

$$V_\alpha(f)(x) = x(x-1)f''(x) + (1+\alpha x)f'(x).$$

1°. *a*. Résoudre, sur $]0,1[$, l'équation différentielle

$$x(x-1)y'(x) + (1+\alpha x)y(x) = 0. \qquad (*)$$

b. Déterminer les fonctions h de $\mathcal{E}$ telles que $V_\alpha(h) = 0$.

c. Quelle est la dimension de Ker (V_α) ? À quelle condition sur α, les éléments de Ker (V_α) sont-ils des polynômes ?

2°. Soit λ_k une valeur propre *non nulle* de l'application de T_α définie dans $\mathbb{R}_n[X]$, et P un polynôme, vecteur propre associé.
Pour résoudre l'équation $V_\alpha(f) = \lambda_k f$, on pose $f(x) = P(x)g(x)$ où g est une fonction inconnue de $\mathcal{E}$.

a. Démontrer que la fonction $x \mapsto [P(x)]^2 g'(x)$ vérifie l'équation différentielle $(*)$. En déduire cette fonction $P^2 g'$.

b. On suppose $\alpha > 0$ et la valeur propre λ_k égale à α. Donner l'expression du polynôme P.
Résoudre l'équation $V_\alpha(f) = \alpha f$ pour $\alpha = 2$. Préciser la dimension du sous-espace vectoriel des fonctions obtenues.

$\mathcal{FIN}$

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

L'objet de ce problème est l'étude des suites de polynômes à coefficients réels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant aux trois conditions (C) suivantes:

$$(C) : \left\{ \begin{array}{ll} 1°. & P_0(X) = 1. \\ 2°. & P_1(X) \text{ n'est pas le polynôme nul.} \\ 3°. & \text{Pour tout entier naturel } n,\ P_n(X+Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_k(X)P_{n-k}(Y). \end{array} \right\}$$

On ne distingue pas un polynôme et une fonction polynomiale.

I

Dans cette partie, après quelques exemples de suites $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (C), on donne une construction générale.

1°. *a.* Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_n(X) = \dfrac{X^n}{n!}$ vérifie (C).

b. Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$P_0(X) = 1, \quad P_n(X) = \frac{X(X+n)^{n-1}}{n!} \quad \text{pour } n \geq 1$$

vérifie (C).

(On pourrait commencer par exprimer $P_n'(X)$ en fonction de $P_{n-1}(X+1)$, pour $n \geq 1$).

c. Soit une fonction u, de variable réelle, à valeurs réelles, admettant au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n, pour tout entier n, et telle que $u(0) = 0$ et $u'(0) = a_1 \neq 0$.

i. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes, unique, telle que pour tout n,

$$e^{xu(t)} = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)t^k + t^n \varepsilon_n(x,t),$$

la fonction $t \mapsto \varepsilon_n(x,t)$ tendant, pour x et n fixés, vers zéro quand t tend vers zéro.

ii. Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (C).

iii. *Application:* Expliciter P_n pour $u(t) = \mathrm{Log}\,(1+t)$.

2°. *a.* Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque vérifiant (C).

i. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $P_n(0) = 0$.

ii. Montrer que P_1 est de degré 1.

iii. On pose $P_1(X) = a_1 X$. Montrer que P_n est de degré n et expliciter son terme de degré n en fonction de a_1.

b. Pour tout $n \geq 1$ on pose $a_n = P_n'(0)$. Établir, pour tout $n \geq 1$, la relation

$$P_n'(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} P_k(X).$$

c. Réciproquement, on se donne une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ avec $a_1 \neq 0$.

i. Montrer qu'il existe une suite et une seule $(P_n)_{n\geq 0}$ vérifiant les trois conditions (C') suivantes:

$$(C'): \left\{ \begin{array}{ll} 1°. & P_0(X) = 1. \\ 2°. & P_n(0) = 0 \text{ pour } n \geq 1. \\ 3°. & P_n'(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} P_k(X) \text{ pour } n \geq 1. \end{array} \right\}$$

ii. Démontrer que cette suite $(P_n)_{n\geq 0}$ vérifie les conditions (C). On pourra raisonner par récurrence et comparer $P_{n+1}'(x+y)$ et $\displaystyle\sum_{k=0} P_k(x) P_{n+1-k}'(y)$.

II

Dans cette partie, sauf en 3°, on considère une suite de polynômes vérifiant les conditions équivalentes (C) et (C') et possédant la propriété suivante: "La série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$, où $(a_n)_{n\geq 1}$ est la série définie en **I** par $a_n = P_n'(0)$, a un rayon de convergence R non nul."

On se propose d'étudier $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$.

Pour $t \in]-R, R[$, on pose $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ et $\widetilde{f}(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, (|t|)^n$.

1°. *a.* Établir, pour $x \in \mathbb{R}$, $t \in]-R, R[$ et $n \in \mathbb{N}$, les majorations suivantes

$$|t^n P_n'(x)| \leq \widetilde{f}(t) \exp(|x| \, \widetilde{f}(t)) \quad \text{et} \quad |t^n P_n(x)| \leq \exp(|x| \, \widetilde{f}(t)).$$

On pourra raisonner par récurrence et utiliser les conditions (C').

b. En déduire que, pour x réel fixé, les séries entières en t, $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^n$ ont un rayon de convergence au moins égal à R.

2°. On suppose dans cette question, t fixé dans $]-R,R[$ et x variable.

a. Montrer que la convergence de la série de fonction de la variable x, $\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^n$ est normale sur tout intervalle fermé $[-M,M]$ de $\mathbb{R}$. (On pourra considérer par exemple $r^n\,|P'_n(x)|\,\left|\frac{t}{r}\right|^n$, r étant convenablement choisi).

b. On pose, toujours à t fixé dans $]-R,R[$, $S_t(x)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$. Montrer que S_t est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une relation entre la dérivée $S'_t(x)$, $S_t(x)$ et $f(t)$.

c. En déduire que $S_t(x)=e^{xf(t)}$.

3°. Réciproquement, on se donne une série entière $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$, avec $a_1 \neq 0$ de rayon de convergence non nul R, de somme $f(t)$.
Montrer que la fonction de t, $t \mapsto e^{xf(t)}$, définie pour $t \in]-R,R[$, est développable en série entière sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$, où la suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ vérifie (C).

4°. Déterminer $f(t)$ et R dans les cas suivants:

i. $P_n(X)=\dfrac{X^n}{n!}$.

ii. $P_0(X)=1$, $P_1(X)=X$ et pour $n\geq 2$, $P'_n(X)=P_{n-1}(X)+P_{n-2}(X)$ et $P_n(0)=0$.

iii. $P_0(X)=1$ et pour $n\geq 1$, $P'_n(X)=P_{n-1}(X)-P'_{n-1}(X)$ et $P_n(0)=0$.

III

Dans cette partie on reprend la suite $(P_n)_{n\mathbb{N}}$ de la question 1°.b de la partie **I**. On lui associe la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que $a_n=P'_n(0)$.

1°. a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$. On appelle $f(t)$ la somme de cette série pour $t \in]-R,R[$.

b. En exprimant $\sum_{n=0}^{\infty} P'_n(x)t^n$ de deux façons différentes, en fonction de x et de $f(t)$, montrer que l'on a $te^{f(t)}=f(t)$, pour tout $t\in]-R,R[$.

2°. a. Étudier les variations de la fonction de la variable réelle u définie par $u\mapsto ue^{-u}$.

b. En déduire que f est la fonction réciproque d'une fonction simple φ.

c. Étudier les variations de f et φ et construire leurs courbes représentatives.

d. Calculer la borne inférieure m de f à 10^{-3} près.

3°. *a.* Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ converge normalement sur $[-R, R]$. En déduire la valeur de la somme de cette série pour $t = R$ et $t = -R$.

b. Soit x fixé. Montrer la convergence normale de la série $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) t^n$ sur $[-R, R]$. En déduire la valeur de sa somme pour $t = R$ et $t = -R$.

IV

Soit E l'espace vectoriel des endomorphismes de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[X]$. On note en particulier D l'endomorphisme de dérivation: $D(P) = P'$.

Étant donné une suite $\beta = (b_n)_{n\geq 1}$ de réels avec $b_1 \neq 0$, on lui associe l'endomorphisme U_β défini par

$$\forall\, P \in \mathbb{R}[X], \quad U_\beta(P) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n P^{(n)}.$$

1°. *a.* Vérifier que U_β est bien défini.

b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, quel est le degré de $U_\beta(X^k)$.

c. En déduire que pour tout entier $k \geq 1$, la restriction de U_β à $\mathbb{R}_k[X]$, est une surjection de $\mathbb{R}_k[X]$ sur $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Montrer que U_β est une surjection de $\mathbb{R}[X]$ sur lui-même.

d. Quel est le noyau de U_β ?

2°. Montrer l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ vérifiant les trois conditions (C'') suivantes:

$$(C''): \left\{ \begin{array}{ll} 1°. & P_0(X) = 1. \\ 2°. & U_\beta(P_n) = P_{n-1} \text{ pour } n \geq 1. \\ 3°. & P_n(0) = 0 \text{ pour } n \geq 1. \end{array} \right\}$$

3°. On se propose d'établir que la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ vérifie (C) ou (C') avec les notations de la partie **I**, où pour (C') on prend la suite $a_n = P_n'(0)$ pour $n \geq 1$.

a. Vérifier que U_β et D commutent.

b. Établir (C') par récurrence sur n.

4°. Déterminer b_n et U_β dans le cas $P_n(X) = \dfrac{X^n}{n!}$.

5°. Faire de même pour la suite $(P_n)_{n\mathbb{N}}$ de la question 1°.*b* de la partie **I**.

$\mathcal{FIN}$

OMRAN KOUBA

Problème de Mathématiques

Pour n un entier naturel supérier ou égal à 2, nous considérons $\omega_n = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$, et nous définissons la matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes, $F_n = (a_{\ell k})$, par $a_{\ell k} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\omega_n^{(\ell-1)(k-1)}$.

Le but du problème est l'étude de quelques propriétés de cette matrice.

I

1°. Soient $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des nombres complexes. On note $V(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ le déterminant de la matrice dont l'élément de la $\ell^{\text{ième}}$ ligne et de la $k^{\text{ième}}$ colonne est ξ_ℓ^{k-1}:

$$V(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \cdots & \xi_1^{n-1} \\ 1 & \xi_2 & \xi_2^2 & \cdots & \xi_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \xi_n & \xi_2^n & \cdots & \xi_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Montrer que $V(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \displaystyle\prod_{1 \leq \ell < k \leq n} (\xi_k - \xi_\ell)$.

2°. En déduire une expression, sous forme de produit, de $\det F_n$.

3°. En utilisant le fait que $e^{i\alpha} - 1 = 2i\sin(\alpha/2)\,e^{i\alpha/2}$, montrer que $\det F_n = i^{\alpha_n}\,\beta_n$, où $\beta_n \in \mathbb{R}_+$ et α_n un entier à expliciter en fonction de n. (Vérifier votre résultat pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$).

4°. Calculer $F_n\overline{F}_n$, où $\overline{F}_n$ est la matrice obtenue de F_n en prenant le conjugué de chacun de ses coefficients. Expliciter $|\det F_n|$.

5°. Trouver $\det F_n$.

II

Pour $(n, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, nous posons

$$S_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{(k+r)^2},$$

et $S_n = S_n^{(0)}$.

1°. Calculer $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} \omega_n^{q\ell}$. On discutera suivant les valeurs de $q \in \mathbb{Z}$.

2°. Montrer que $S_n^{(r)} = S_n$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

3°. Montrer que

$$|S_n|^2 = \sum_{\substack{0\leq k<n\\0\leq r<n}} \omega_n^{k^2+2kr}.$$

4°. Conclure que

$$|\mathrm{Tr}\,(F_n)|^2 = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \\ 2 & \text{si} \quad n = 0 \bmod 4 \\ 0 & \text{si} \quad n = 2 \bmod 4 \end{cases}$$

III

Si M est une matrice carrée à coeficients complexes, on désigne par $Sp(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M, et pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on écrit $E(M,\lambda)$ pour le sous-espace vectoriel $\{z \in \mathbb{C}^n : \; Mz = \lambda z\}$.

1°. Déterminer $G_n = F_n^2$ puis G_n^2.

2°. Montrer que F_n et G_n sont diagonalisables, et que

$$Sp(G_n) \subset \{1, -1\}, \qquad Sp(F_n) \subset \{1, i, -1, -i\}.$$

3°. Montrer que $E(G_n, 1) \oplus E(G_n, -1) = \mathbb{C}^n$, puis déterminer, en discutant suivant la parité de n, les dimensions des sous-espaces $E(G_n, 1)$ et $E(G_n, -1)$.

4°. Montrer que

$$E(F_n, 1) \oplus E(F_n, -1) = E(G_n, 1), \qquad E(F_n, i) \oplus E(F_n, -i) = E(G_n, -1).$$

Dans toute la suite du problème, nous posons

$$\begin{array}{rclrcl} m_1 & = & \dim E(F_n, 1), & m_i & = & \dim E(F_n, i), \\ m_{-1} & = & \dim E(F_n, -1), & m_{-i} & = & \dim E(F_n, -i). \end{array}$$

5°. Déduire de 4° une expression de $m_1 + m_{-1}$ et de $m_i + m_{-i}$ en fonction de n.

6°. *a.* Exprimer $\mathrm{Tr}\,(F_n)$ et $\det F_n$ en fonction de m_1, m_i, m_{-1} et m_{-i}.

b. On suppose que $n = 4k + 2$. Déterminer m_1, m_i, m_{-1} et m_{-i} en fonction de k.

c. Déterminer de même m_1, m_i, m_{-1} et m_{-i} en fonction de k lorsque $n = 4k + 1$, puis lorsque $n = 4k + 3$.

d. On admet que $\mathrm{Re}(\mathrm{Tr}\,(F_{4k})) \geq 0$, pour tout $k \geq 1$. Déterminer de même m_1, m_i, m_{-1} et m_{-i} en fonction de k lorsque $n = 4k$.

7°. Exprimer m_1, m_i, m_{-1} et m_{-i} en fonction de n seulement, en utilisant la fonction partie entière.

8°. Donner une expression simple de S_n, défini au **II**, en fonction de n.

9°. Pour quelles valeurs de n le nombre $-i$ est-il valeur propre de F_n ?

$\mathcal{FIN}$

OMRAN KOUBA

Problème de Mathématiques

I

1°. Vérifier les propriétés suivantes:

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1 \iff \overline{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}$.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda^n = 1,\ \lambda \neq 1) \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda^k = 0$.

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda^n = \mu^n = 1,\ \lambda \neq \mu) \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda^k \overline{\mu}^k = 0$.

2°. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité, rangées dans un ordre quelconque. Soit A la matrice carrée d'ordre n dont l'élément situé à l'intersection de la $m^{\text{ième}}$ ligne et la $k^{\text{ième}}$ colonne est égal à λ_k^m. Calculer le produit $A^*\,A$, (A^* désigne la matrice adjointe de A). En déduire que A est inversible, former A^{-1}, et calculer le module du déterminant de A.

II

On désigne par $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel des suites complexes $a = (a_n)_{n\geq 1}$, bornées et indexées sur $\mathbb{N}^*$. On rappelle que $a \mapsto \|a\| = \sup\limits_{n\geq 1} |a_n|$ est une norme sur $\mathcal{B}$. Les problèmes de continuité seront étudiés par rapport à cette norme.

On désigne par $\mathcal{P}$ la partie de $\mathcal{B}$ formée des suites périodiques ; une suite a appartient à $\mathcal{P}$, si et seulement si, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, $a_{n+p} = a_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un tel entier p est appelé une période de a.

1°. Soit $a \in \mathcal{P}$, montrer que l'ensemble $P(a)$ des périodes de a est de la forme

$$p_a\mathbb{N}^* = \{kp_a :\ k \in \mathbb{N}^*\}.$$

Dans quel cas $p_a = 1$?

Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$. Étudier la partie $\mathcal{P}^{(q)}$ de $\mathcal{P}$ formée des suites a pour lesquelles un entier donné q est une période: $\{a \in \mathcal{P} :\ q \in P(a)\}$. On montrera notamment que c'est un sous-espace vectoriel et on en donnera une base.

2°. Soient $a = (a_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{P}$, et $p \in P(a)$.

– Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$ ne dépend pas de $n \in \mathbb{N}$.

– Démontrer que $\displaystyle\frac{1}{p}\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$, ne dépend pas non plus du choix de $p \in P(a)$.

On pose donc $\mu(a) = \displaystyle\frac{1}{p}\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$.

3°. Démontrer que $\mu : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{C} : a \mapsto \mu(a)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{P}$. Trouver sa norme.

On désignera par la suite $\mathcal{P}_0$ le noyau de μ.

4°. *i.* Soit $a \in \mathcal{P}_0$, on lui associe la suite σ_a définie par

$$(\sigma_a)_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Montrer que $\sigma_a \in \mathcal{P}$. On admettra, comme evident, le fait que $\sigma : a \mapsto \sigma_a$ est une application linéaire de $\mathcal{P}_0$ dans $\mathcal{P}$. Trouver le noyau et l'image de σ.

ii. Montrer que σ n'est pas continue, (on pourra associer à tout entier positif k, la suite $x^{(k)} \in \mathcal{P}$, de période $2k$, dont les k premier termes sont égaux à 1 et les k suivants, tous égaux à -1).

iii. Pour $a \in \mathcal{P}_0$ on pose $N(a) = \|\sigma_a\|$. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{P}_0$ et que $\|a\| \leq 2N(a)$. Est-ce que l'on peut remplacer 2 par une constante plus petite ? Est-ce que les deux normes N et $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{P}_0$, sont équivalentes ?

5°. *i.* Soit $a \in \mathcal{P}$, on lui associe la suite D_a définie par $(D_a)_n = a_{n+1} - a_n$. Montrer que $D_a \in \mathcal{P}$, on admettra, comme évident, le fait que $D : a \mapsto D_a$ est un endomorphisme de $\mathcal{P}$. Trouver le noyau et l'image de D. Démontrer que D est continue et trouver sa norme.

ii. Établir les résultat suivants:

– ω est une valeur propre de D si, et seulement si, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1+\omega)^p = 1$.

– Caractériser les sous-espaces propres de D.

– Soit $q \in \mathbb{N}^*$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ les q racines $q^{\text{ième}}$ de 1. Démontrer que $(S_{\lambda_1}, \ldots, S_{\lambda_q})$, (où $(S_\lambda)_n = \lambda^n$), est une base de $\mathcal{P}^{(q)}$ le sous-espace vectoriel des suites admettant q pour période. Donner les composantes de $a \in \mathcal{P}^{(q)}$ sur cette base en fonction de $a_1, \ldots, a_p$.

– Montrer que D est diagonalisable, et qu'une base de $\mathcal{P}_0$ est la famille $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ où Λ est l'ensemble des racines de l'unité autres que 1, et S_λ est la suite définie dans la question précédente. Montrer que $\mathcal{P} = \ \text{Im}\ D \oplus\ \ker\ D$.

6°. À toute suite $a \in \mathcal{P}$ on associe la série $\sum \frac{a_n}{n}$, et l'on pose $S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$. Établir les résultats suivants:

i. Pour tout $(p, r) \in \mathbb{N}^{*2}$ il existe $\gamma(r, p) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{r+kp} - \frac{1}{p}\text{Log}\, n\right) = \gamma(r, p).$$

ii. Soit $a \in \mathcal{P}$, et considérons $p \in P(a)$ une période de a. Montrer que

$$S_{np}(a) = \sum_{m=1}^{p}\left(a_m \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{m+kp}\right).$$

En déduire que la série $\sum \frac{a_n}{n}$ converge si, et seulement si, $a \in \mathcal{P}_0$.

iii. Si $a \in \mathcal{P}_0$, alors $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n} = \sum_{m=1}^{p} a_m\gamma(m, p)$ où p est une période de a.

iv. En admettant le résultat suivant:

$$\forall\, \theta \in]0, 2\pi[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n\theta}{n} = -\text{Log}\,(2\sin\frac{\theta}{2}), \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi-\theta}{2},$$

calculer $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$, lorsque a est une suite S_λ (voir 5°.*ii* pour la notation) avec $\lambda = \exp(\frac{2i\pi k}{p})$, $(k \in \{1, 2, \ldots, p-1\})$.

7°. On conserve les notations du 6°, et l'on définit la forme linéaire ν sur $\mathcal{P}_0$ par $\nu(a) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$. Établir les résultats suivants:

i. La forme linéaire ν n'est pas continue.

ii. Le calcul de 6°.*iv.* et celui de 5°.*ii.* permet de déterminer $\nu(a)$ à partir de a_1, a_2, ..., a_p lorsque p est une période de a.

- Effectuer le calcul de $\nu(\alpha)$ par cette méthode dans le cas particulier de la suite α de période $p \geq 2$ définie par

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = a_{m+1} = \cdots = a_{p-1} = 0, \text{ et } a_m = 1, a_p = -1.$$

- On désigne par $c = \gamma(1,1)$ la constante d'Euler. Montrer que $\gamma(p,p) = \dfrac{c}{p}$. En appliquant le résultat de $6°.iii$ à la suite α du point précédent, calculer $\gamma(m,p)$. On pose alors, pour $1 \leq m < p$,

$$\gamma'(m,p) = \frac{\pi}{2p}\operatorname{cotg}\frac{m\pi}{p} + \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} 2\sin^2\frac{km\pi}{p}\operatorname{Log}\left(2\sin\frac{k\pi}{p}\right).$$

Montrer que, pour $a \in \mathcal{P}_0$ admettant p pour période, nous avons

$$\nu(a) = \sum_{m=1}^{p-1} a_m \gamma'(m,p).$$

Application: Calculer $\gamma'(1,4)$,$\gamma'(2,4)$ et $\gamma'(3,4)$. Puis utiliser ceci pour calculer les sommes des séries

$$A_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n}, \quad A_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$A_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots$$

8°. Étudier la continuité de ν sur $\mathcal{P}_0$ muni de la norme N, (voir 4°). Si ν est continue pour cette norme, alors calculer sa norme.

$\mathcal{FIN}$

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

On se propose dans ce problème d'étudier l'evolution de la temperature d'une barre métalique dont les extremités sont maintenues à une temperature constante, par la méthode des séries de Fourier.

I

1°. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^\infty t^n e^{-t^2}\, dt$ est convergente.

2°. Montrer la convergence, pour tout $x \in \mathbb{R}$, de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2} \cos(tx)\, dt$. On note $F(x)$ la valeur de cette intégrale.

3°. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que F soit K-lipschitzienne. Que peut-on en conclure concernant la continuité de F ?

4°. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et exprimer $F'(x)$ en fonction de x et de $F(x)$.

5°. En déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2} \cos(tx)\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$. (On admettra que $F(0) = \sqrt{\pi}/2$).

II

Dans cette partie $t > 0$ est un paramètre fixé.

1°. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les deux séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(x+2\pi n)^2/4t}, \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(x-2\pi n)^2/4t}$$

sont convergentes. On note la somme de ces deux séries $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(x+2\pi n)^2/4t}$.

2°. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$H_t(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(x+2\pi n)^2/4t}.$$

a. Montrer que H_t est 2π-périodique.

b. Montrer que H_t est continue sur $[0, 2\pi]$, puis sur $\mathbb{R}$.

c. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Montrer que le coefficient de Fourier exponentiel $C_m(H_t)$ est égal à e^{-tm^2}.

d. En déduire

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad H_t(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-(x+2\pi n)^2/4t} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-tm^2+ixm}. \qquad (*)$$

e. Vérifier les propriétés suivantes:

i. Pour tout $t > 0$, et tout $x \in \mathbb{R}$, $H_t(x) \geq 0$.

ii. Pour tout $t > 0$, $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} H_t(x)\, dx = 1$.

iii. Pour tout $t > 0$, H_t est paire.

iv. Pour tout $\eta \in]0, \pi[$, $\displaystyle\lim_{t \overset{>}{\to} 0} \left(\sup_{\eta \leq x \leq \pi} H_t(x) \right) = 0$.

III

Soit f une fonction continue 2π-périodique. On pose

$$F(t,x) = \begin{cases} H_t * f(x) & \text{si} \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ \\ f(x) & \text{si} \quad (t,x) \in \{0\} \times \mathbb{R} \end{cases}$$

Nous rappelons que $H_t * f(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} H_t(u) f(x-u)\, du$.

1°. Montrer que, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$H_t * f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(f) e^{-tn^2} e^{inx}.$$

2°. Montrer que F est deux fois continument différentiable en tout point $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Et que

$$\forall\, (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) = \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)$$

3°. Notons $M = \sup\{|f(u)| :\ u \in \mathbb{R}\}$. Soit $\eta \in]0, \pi[$, montrer, pour tout (t,x) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, l'inégalité:

$$|F(t,x) - f(x)| \leq \sup_{|u|<\eta} |f(x+u) - f(x)| + 2M \sup_{\eta \leq u \leq \pi} H_t(u).$$

En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

On suppose désormais que f est une fonction impaire.

4°. Montrer que F est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+ \times [0, \pi]$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, \pi]$ qui vérifie

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \dfrac{\partial F}{\partial t} & \text{sur} \quad \mathbb{R}_+^* \times [0, \pi] \\ F(0, x) = f(x) & \text{pour} \quad x \in [0, \pi] \\ F(t, 0) = F(t, \pi) = 0 & \text{pour} \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

5°. Soit G une fonction continue sur $\mathbb{R}_+ \times [0, \pi]$, de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, \pi]$ qui vérifie $(\mathcal{P})$. On note $K = G - F$, et on pose $W(t) = \displaystyle\int_0^\pi K^2(t, x)\, dx$. En étudiant le signe et la monotonie de W, montrer que W est identiquement nulle. Que peut-on en conclure ?

6°. Soit AB une barre métalique de longueure $\overline{AB} = \pi$, et dont les extrimités A et B sont maintenus à une temperature constante 0. On suppose qu'à l'instant initial, la temperature du point M de la barre est donnée par $f(x) = x(\pi - x)$, (avec $\overline{AM} = x$). Trouver la temperature $F(t, x)$ à l'instant t du point M de la barre (avec $\overline{AM} = x$). On admettra que F est la solution unique du problème $(\mathcal{P})$.

$\mathcal{FIN}$

Problème de Mathématiques

Les parties **I**,**II**, **III** *et* **IV** *sont indépendantes et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.*

I

Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} a_n$, avec

$$a_n = \left[1 - \left(\frac{\operatorname{Log} n}{\operatorname{Log}(n+1)}\right)^n\right] \frac{\operatorname{Log} n}{n^\alpha}, \qquad (\alpha > 0)?$$

II

Notations : P est un polynôme, A est une matrice carrée réelle ou complexe d'ordre n, I est la matrice identité d'ordre n et u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E qui est de dimension finie ou infinie.

Il s'agit, pour chacune des assertions suivantes, de répondre par **Vraie** ou **Fausse** en justifiant soit par une courte démonstration du résultat si vous pensez qu'elle est vraie, ou par un contre-exemple dans le cas contraire. Attention à ne pas aller trop vite dans vos conclusions.

1°. 0 est valeur propre de toute matrice.
2°. λ est valeur propre de u si, et seulement si, $\operatorname{Ker}(u - \lambda I) \neq \emptyset$.
3°. Si x est vecteur propre pour u, il l'est aussi pour $P(u)$.
4°. Si $AX = \lambda X$ alors X est vecteur propre de A.
5°. Si A admet n valeurs propres distinctes alors $P(A)$ aussi.
6°. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre.
7°. Un endomorphisme admet un nombre fini de valeurs propres.
8°. Un endomorphisme admet un nombre fini de vecteurs propres.

9°. Un endomorphisme admet un nombre fini de sous-espaces propres.

10°. En dimension finie, un endomorphisme admet un nombre fini de valeurs propres.

11°. En dimension finie, un endomorphisme admet un nombre fini de vecteurs propres.

12°. En dimension finie, un endomorphisme admet un nombre fini de sous-espaces propres.

13°. Un endomorphisme admet au moins une valeur propre.

14°. A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres.

15°. A et ${}^tA$ ont les mêmes espaces propres.

16°. Si $P(A) = 0$ les racines de P sont les valeurs propres de A.

17°. Si $P(A) = 0$ et P est de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$, alors P est égal au polynôme caractéristique de A.

18°. Le polynôme caractéristique de A est annulé par A.

19°. Si A n'est pas diagonalisable alors il n'existe pas de polynôme annulé par A.

20°. Si $P(A) = 0$ et $P(0) \neq 0$ alors A est inversible.

21°. Si A est inversible il existe un polynôme P tel que $P(A) = 0$ et $P(0) \neq 0$.

22°. Si A est inversible alors pour tout polynôme P tel que $P(A) = 0$ on a $P(0) \neq 0$.

On suppose dans les assertions 23 à 29 que $\mathcal{X}_A(X) = (X-1)^2(2-X)$.

23°. l'ordre n de A est nécessairement 3.

24°. A est diagonalisable.

25°. Les seules valeurs propres possibles de A sont 1 et 2.

26°. 1 est 2 sont des valeurs propres de A.

27°. Les valeurs propres de A sont exactement 1 et 2.

28°. A est inversible.

29°. $(A-I)(A-2I) = 0$.

30°. Toute matrice réelle est trigonalisable (car il suffit de la considérer comme une matrice complexe et que toute les matrices complexes sont trigonalisables).

31°. Si P est scindé et $P(A) = 0$ alors A est diagonalisable.

32°. Une matrice de rang 1 est diagonalisable.

33°. La somme de deux endomorphismes diagonalisables est diagonalisable.

34°. Si pour toute valeur propre λ de A la dimension de le sous-espace propre associé est égale à la multiplicité de λ alors A est diagonalisable.

35°. Si A est une matrice réelle d'ordre 3 telle que $\mathcal{X}_A(X) = (1-X)(X^2+1)$ alors il existe une matrice réelle inversible P telle que

$$A = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} P.$$

36°. Soit J la matrice d'ordre n dont tous les coefficients valent 1. Alors les valeurs propres de J sont 0 et n.

37°. Si A est diagonalisable et admet 1 pour unique valeur propre alors $A = I$.

38°. La somme des valeurs propres de A est egale à la trace de A.

39°. Si A est diagonalisable alors la somme des valeurs propres de A est egale à la trace de A.

40°. Si $P(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (\lambda_k - X)^{m_k}$ et si $P(A) = 0$ alors l'un des (λ_k) est une valeur propre de A.

III

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1°. "Question de cours": Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé sans racines multiples tel que $P(u) = 0$.

2°. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On définit $\widetilde{u} \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ par $\forall\, x \in F,\ \widetilde{u}(x) = u(x)$. Montrer que si u est diagonalisable alors $\widetilde{u}$ l'est aussi.

3°. Soient u et v deux endomorphismes *diagonalisables* de E qui commutent, c'est à dire $u \circ v = v \circ u$.

a. Montrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.

b. Soit F un sous-espace propre de u. Montrer que F admet une base formée de vecteurs propres de v.

c. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{E}$ de E telle que les matrices de u et de v dans cette base soient diagonales.

4°. Plus généralement, démontrer par récurrence sur k, $(k \geq 2)$, la propriété suivante:

" Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, et toute famille de k endomorphismes *diagonalisables* $u_1, u_2, \dots u_k$ de E, qui commutent deux à deux, il existe une base $\mathcal{E}$ de E telle que les matrices des endomorphismes $u_1, u_2, \dots u_k$ dans cette base soient diagonales".

(On porrait remarquer qu'un sous-espace propre de u_k est stable par les endomorphismes $u_1, u_2, \dots u_{k-1}$).

IV

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$. On définit $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathrm{IR})$ par

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}.$$

1°. On pose $Q = \begin{bmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathrm{IR})$, où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$.

a. Prouver que Q est inversible et calculer Q^{-1} et QMQ^{-1}.

b. Établir $\mathcal{X}_M(X) = \mathcal{X}_{A+B}(X)\mathcal{X}_{A-B}(X)$.

c. Soit $k \in \mathrm{IN}$. Montrer que M^k est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} (A+B)^k & 0 \\ C_k & (A-B)^k \end{bmatrix}.$$

En déduire que si P est un polynôme tel que $P(M) = 0$ alors $P(A+B) = 0$ et $P(A-B) = 0$.

d. Montrer que, si M est diagonalisable alors $A+B$ et $A-B$ le sont aussi.

2°. Réciproquement, on veut montrer que si $A+B$ et $A-B$ sont diagonalisables alors M est aussi diagonalisable.

a. Soit $V \in \mathrm{IR}^n$ un vecteur propre de $A+B$. Montrer que le vecteur $\begin{bmatrix} V \\ V \end{bmatrix} \in \mathrm{IR}^{2n}$ est un vecteur propre de M. De manière analogue, Soit $W \in \mathrm{IR}^n$ un vecteur propre de $A-B$, trouver en fonction de W un vecteur propre de M.

b. On suppose $A+B$ et $A-B$ sont diagonalisables. On note $S \in \mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$ (resp. $R \in \mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$) la matrice dont les vecteurs colonnes forment une base de vecteurs propres de $A+B$ (resp. $A-B$), et on considère $P = \begin{bmatrix} S & R \\ S & -R \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathrm{IR})$. Montrer que P est inversible, puis en déduire que M est diagonalisable.

FIN

Problème de Mathématiques

Les parties **I**, *et* **II** *sont indépendantes et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.*

I

On identifie les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ canoniquement aux matrices carrées d'ordre n. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. on peut alors munir $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme des applications linéaires continues ;

$$\|A\|' = \sup\ \left\{\ \|Ax\| :\ x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|x\| \leq 1\right\}$$

une telle norme est dite une norme matricielle subordonnée à la norme $\|.\|$.

Dans la suite nous ne considérons sur $\mathbb{R}^n$ que les trois normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, définies pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|\,, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k|\,.$$

1°. Montrer que si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\|A\|_1' = \sup_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right), \quad \|A\|_\infty' = \sup_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right).$$

2°. Montrer que

a. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors

$$\|A\|_2' = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ est une valeur propre de } A\}.$$

b. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\|A\|_2' = \sqrt{\|{}^tA.A\|_2'} = \|{}^tA\|_2'$.

3°. *a*. Montrer que si $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ sont des nombres positifs, alors

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j^2\right).$$

b. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right|^2 \leq \|A\|_\infty' \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_j|^2\right).$$

c. En déduire que $\|A\|_2' \leq \sqrt{\|A\|_1' \, \|A\|_\infty'}$.

d. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 16 & 9 & 22 & 15 \\ 20 & 8 & 21 & 14 & 2 \\ 7 & 25 & 13 & 1 & 19 \\ 24 & 12 & 5 & 18 & 6 \\ 11 & 4 & 17 & 10 & 23 \end{bmatrix}$$

calculer $\|A\|_1'$, $\|A\|_\infty'$, utiliser ensuite ce qui précède pour trouver $\|A\|_2'$.

II

On considère E un espace euclidien de dimension n, muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et une application f de E dans E, antisymétrique, c'est à dire:

$$\forall (x, y) \in E \times E, \ \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle.$$

1°. On suppose $n \geq 2$.

a. Démontrer que f est un endomorphisme de E.

b. Décrire la matrice de f dans une base orthonormée de E. L'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, donner sa dimension.

2°. *a*. Démontrer que si f est inversible alors n est un entier pair.

b. Plus généralement, prouver que $E = \operatorname{Ker} f \overset{\perp}{\bigoplus} \operatorname{Im} f$, et que le rang de f est un entier pair.

c. Comparer les images et les noyaux de f et de f^2.

d. Montrer que si F est un sous-espace stable par f alors $F^\perp$ est aussi stable par f.

3°. Dans cette question <u>seulement</u>, on suppose que $n = 2p \geq 2$, et que f vérifie la condition supplémentaire $f^2 = -I$. (I étant l'application identité).

a. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $F = \operatorname{Vect}\,(x, f(x))$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 et stable par f.

b. Montrer, par récurrence sur p, qu'il existe $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces de E deux à deux orthogonaux, chacun de dimension 2, et stable par f tels que

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leq k \leq p}} E_k.$$

c. On choisit dans chaque E_k, $(k = 1, 2, \ldots p)$ un vecteur e_k de norme 1. Montrer que

$$(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2), \ldots, e_p, f(e_p))$$

est une base orthonormale de E. Écrire la matrice de f dans cette base.

4°. *a*. Prouver que les valeurs propres de f^2 sont toutes réelles, négatives ou nulles.

b. Démontrer que les polynômes caractéristiques de f et de f^2 vérifient

$$\mathcal{X}_{f^2}(X^2) = (-1)^n[\mathcal{X}_f(X)]^2.$$

5°. Soient λ une valeur propre non nulle de f^2, et E_λ le sous-espace propre de f^2 associé à λ.

a. Démontrer que E_λ est stable par f.

b. Démontrer qu'il existe une base orthogonale de E_λ de la forme

$$(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2), \dots, e_p, f(e_p)).$$

comparer pour chaque indice i les normes de e_i et $f(e_i)$.

c. En déduire qu'il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de f soit, dans cette base, de la forme

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{matrix}} & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & 0 \end{matrix}} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \boxed{\begin{matrix} 0 & \alpha_m \\ -\alpha_m & 0 \end{matrix}} & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

dans laquelle les $(\alpha_i)_{1\leq i\leq m}$ sont non nuls, et le dernier bloc carré diagonal est d'ordre $n - 2m \geq 0$.

6°. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Détrminer une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ dans la quelle la matrice de f a la forme de 5°.

$\mathcal{FIN}$

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

EXERCICE.

Dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de $\mathbb{R}^3$, on considère

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ \operatorname{ch} t \\ \operatorname{sh} t \end{bmatrix}.$$

1°. Déterminer l'équation du plan osculateur à l'instant t.

2°. Déterminer l'intersection de la tangente à f avec le plan YOZ, à l'instant t. On note ce point $g(t)$.

3°. Soit Π_t la tangente à la courbe plane $(\mathbb{R}_+^*, g)$, à l'instant t, et soit D_t l'image de Π_t par la symétrie d'axe $g(t) + \mathbb{R}\overrightarrow{j}$. Déterminer l'enveloppe de la famille $(D_t)_{t \in \mathbb{R}_+^*}$.

PROBLÈME.

NOTATIONS

Si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite réelle on désigne par $\displaystyle\prod_{k=0}^{+\infty} x_k$ la limite, lorsqu'elle existe, de $\displaystyle\left(\prod_{k=0}^{n} x_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Dans tout le problème u_n désigne, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par

$$u_n(x) = x\text{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \text{Log}\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Lorsque la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge on note $S(x)$ sa somme.

I

1°. Quel est l'ensemble de définition de S ? On notera D cet ensemble. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

2°. Calculer, pour $x \in D$, $S(x+1) - S(x)$.

3°. Dans les parties **I** et **III** la fonction T sera définie sur D par: $T(x) = \exp[S(x)]$.

a. Montrer que T vérifie les propriétés suivantes:

$$T(0) = 1 \qquad (i)$$

$$\forall\, x \in D, \qquad T(x+1) = (x+1)T(x) \qquad (ii)$$

b. En déduire que:$\forall\, n \in \mathbb{N},\ T(n) = n!$.

4°. Montrer que: $\forall\, x \in D, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad T(x+n) = T(x)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x+k)$.

5°. *a*. Montrer que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{k}\right) - \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\right] = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \mathrm{Log}\,(n+1).$$

b. On pose $R_n(x) = S(x+n) - S(n) - x\mathrm{Log}\,(n+1)$. Montrer que $R_n(x)$ est le reste d'ordre n d'une série convergente (utiliser 5°.a). En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

c. On note $\varphi_n(x) = \dfrac{T(x+n)}{n!(n+1)^x}$. En déduire que:

$$\forall\, x \in D, \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 1 \qquad (iii)$$

6°. *a*. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k} - \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]$ converge. On notera γ sa somme.

b. Montrer que, pour tout $x \in D$,

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{k^{1-x}(k+1)^x}{x+k} = e^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{e^{x/k}}{1+x/k}.$$

c. En déduire que, pour tout $x \in D$,

$$T(x) = e^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1} e^{x/k}\right].$$

II

On désigne, dans cette partie, par T une fonction continue dont l'ensemble de définition est D et vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii) de la partie **I**.

Le but de cette partie est de montrer que: $\forall\, x \in D, \quad T(x) = \exp[S(x)]$.

1°. Montrer que: $\forall\, x \in D, \quad T(x+n) = (x+1)(x+2)\cdots(x+n)T(x)$.

2°. En déduire que T et φ_n sont strictement positives sur D et que

$$\forall\, x \in D, \quad \operatorname{Log} T(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[x \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \operatorname{Log}\left(1 + \frac{x}{k}\right) \right] + r_n(x)$$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n(x) = 0$ pour tout x de D.

3°. En déduire que $\forall\, x \in D, \quad T(x) = \exp[S(x)]$.

4°. Quel résultat obtient-on en remplaçant dans l'hypothèse initiale de la partie **II**: "T une fonction continue", par: "T une fonction strictement positive".

III

1°. Soit $x \in D$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt$ est convergente. On note, alors

$$\widetilde{\Gamma}(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt$$

2°. *a*. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer les deux inégalités suivantes

$$i. \quad \forall\, t \in [0, n], \qquad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

$$ii. \quad \forall\, t \in [0, n], \qquad e^{-t}\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D$, on pose $\gamma_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^x\, dt$. Montrer que

$$0 \leq \int_0^n t^x e^{-t}\, dt - \gamma_n(x) \leq \frac{1}{n} \widetilde{\Gamma}(x+2).$$

c. En déduire que, pour tout $x \in D$, $\lim\limits_{n \to \infty} \gamma_n(x) = \widetilde{\Gamma}(x)$.

3°. En effectuant des intégrations par parties, montrer que, pour $x \in D$,

$$\gamma_n(x) = \frac{n^{x+1} n!}{(x+1) \cdots (x+n)(x+n+1)}.$$

4°. En déduire que, pour $x \in D$ et $n \geq 2$, $\gamma_n(x)$ s'exprime sous la forme $\lambda_n(x)\, T(x)$, où $\lambda_n(x)$ est une fonction à déterminer. (On utilisera **I**.4° et **I**.5°.*c*).

5°. Montrer que pour tout $x \in D$ on a $T(x) = \widetilde{\Gamma}(x)$.

6°. Trouver, pour $x > 0$, une relation simple entre $T(\frac{x}{2}) T(\frac{x-1}{2})$ et $T(x)$. on admettra que $T(-1/2) = \sqrt{\pi}$.

$\mathcal{FIN}$

OMRAN KOUBA

Problème de Mathématiques

I

1°. soit α un réel strictement positif. Étant donnés trois réels quelconques a, λ, μ déterminer l'ensemble des fonctions y deux fois continûment dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $y(a) = \lambda$, $y'(a) = \mu$ qui vérifient l'équation

$$y'' - \alpha^2 y = 0. \tag{1}$$

2°. Soit y une solution de (1). Montrer que s'il existe deux réels x_1, x_2 avec $x_1 < x_2$, tels que

$$y(x_1) = y(x_2) = 0$$

alors y est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

3°. Soit y une solution de (1). Montrer que s'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $y(x_1) = 0$, et si $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$, alors y est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

4°. Soit a un réel et soit $f :]a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. On se propose d'étendre les résultats des 2° et 3° questions aux fonctions y deux fois continûment dérivables sur $]a, +\infty[$ et vérifiant sur cet intervalle l'équation suivante

$$y'' - f(x)y = 0. \tag{2}$$

De telles fonctions seront appelées "solutions de (2) " sur $]a, +\infty[$.

a. Soit y une solution de (2) qui s'annule en tout point d'un intervalle ouvert non vide contenu dans $]a, +\infty[$. Montrer que y s'annule en tout point de $]a, +\infty[$.

b. Soit y une solution de (2). Montrer que yy' est croissante sur $]a, +\infty[$.

c. Soit y une solution de (2). On suppose qu'il existe x_1 et x_2 dans $]a, +\infty[$, avec $x_1 < x_2$ tels que $y(x_1) = y(x_2) = 0$. Montrer que yy' est identiquement nulle sur $[x_1, x_2]$. En déduire que y est identiquement nulle sur $]a, +\infty[$.

d. On considère maintenant une solution y de (2) telle que $\lim_{x\to+\infty} y(x)y'(x) = 0$. Montrer que s'il existe $x_1 > a$ tel que $y(x_1) = 0$ alors y est identiquement nulle sur $]a, +\infty[$.

II

Dans toute la suite on désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur $[0, +\infty[$ à coefficients réels.

1°. Montrer que si $f \in E$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\, e^{-x}\, dx$ est absolument convergente.

2°. Montrer que si $f \in E$ on a

$$\int_0^{\infty} f(x)\, e^{-x}\, dx = f(0) + \int_0^{\infty} f'(x)\, e^{-x}\, dx.$$

3°. On pose, pour $n \geq 0$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\infty} x^n\, e^{-x}\, dx$. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}. Puis déterminer I_n.

III

On désigne toujours par E l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur $[0, +\infty[$ à coefficients réels. Pour f et g dans E, on pose $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{\infty} f(x)g(x)e^{-x}\, dx$.

1°. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2°. Pour tout couple (n, k) d'entiers positifs ou nuls on note $f_{n,k}$ la dérivée $k^{\text{ième}}$ de $x \mapsto \dfrac{e^{-x}x^n}{n!}$ (la dérivée d'ordre zéro d'une fonction étant par convention la fonction elle-même). Montrer que l'on a

$$\forall x \geq 0, \quad f_{n,k}(x) = e^{-x} g_{n,k}(x)$$

où $g_{n,k}$ est une fonction polynôme que l'on calculera.

3°. Montrer que $g_{n,k}(0) = 0$ si $k < n$ et que $g_{n,n}(0) = 1$ pour tout $n \geq 0$.

4°. Montrer que l'on a, pour tout $n \geq 0$, pour tout $k \geq 1$ et pour tout élément u de E,

$$\int_0^{\infty} f_{n,k}(x)u(x)\, dx + f_{n,k-1}(0)\, u(0) + \int_0^{\infty} f_{n,k-1}(x)u'(x)\, dx = 0.$$

5°. Montrer que l'on a, pour tout $n \geq 0$ et pour tout élément u de E,

$$\int_0^{\infty} f_{n,n}(x)u(x)\, dx = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-x}x^n u^{(n)}(x)\, dx.$$

6°. Pour $n \geq 0$ on note désormais E_n le sous-espace vectoriel de E formé des éléments de degré inférieur ou égal à n.

a. Montrer que $g_{n+1,n+1}$ est orthogonal à E_n pour le produit scalaire introduit au 1°.

b. Montrer que $(g_{0,0}, g_{1,1}, \ldots, g_{n,n})$ est une base orthonormale de E_n pour ce produit scalaire.

7°. Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une suite *orthonormale* d'éléments de E vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \deg e_n \leq n \quad \text{et} \quad e_n(0) \geq 0.$$

Montrer que $e_n = g_{n,n}$ pour tout $n \geq 0$.

IV

On désigne toujours par E l'espace vectoriel des fonctions polynômes sur $[0,+\infty[$ à coefficients réels et E_n le sous-espace vectoriel de E formé des éléments de degré inférieur ou égal à n. Pour $n \geq 0$ et $x \geq 0$ on pose $P_n(x) = g_{n,n}(x)$.

1°. Vérifier que P_1, P_2 et P_3 possède respectivement une, deux et trois racines strictement positives distinctes.

2°. Soit $n \geq 1$. Montrer $\displaystyle\int_0^{\infty} P_n(x)\, e^{-x}\, dx = 0$. En déduire que P_n possède au moins une racines strictement positive d'ordre de multiplicité impair.

3°. Soit $n \geq 1$ et $x_1, \ldots, x_\ell$ les racines positives distinctes de P_n d'ordre de multiplicité impair, rangées par ordre croissant. On pose, pour $x \geq 0$

$$Q_n(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_\ell).$$

Montrer que $(-1)^n P_n(x) Q_n(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

4°. Soit $n \geq 1$. Montrer que P_n possède n racines strictement positives distinctes.

V

Soit $n \geq 0$ un entier. On note toujours $P_n(x)$ la fonction polynôme introduite au **IV**.

1°. Déterminer l'ensemble Δ_n des réels non nuls vérifiant l'inéquation

$$\frac{2n+1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2} < 0.$$

On note α_n la borne inférieure de $\Delta_n \cap]0,+\infty[$. Donner un équivalent simple de α_n quand n tend vers l'infini.

2°. Montrer que l'on a, pour tout réel x et pour tout entier $n \geq 0$,

$$xP_n''(x) + (1-x)P_n'(x) + nP_n(x) = 0.$$

3°. On pose, pour $x \geq 0$, $h_n(x) = e^{-x/2}\sqrt{x}\, P_n(x)$. Montrer que l'on a, pour tout $x > 0$ et pour tout entier $n \geq 0$,

$$4x^2 h_n''(x) + (1 + (4n+2)x - x^2) h_n(x) = 0.$$

4°. Pour $n \geq 1$ on note x_n la plus grande racine de P_n. En utilisant les résultats du **I** montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\alpha_n = 4$ et telle que $x_n \leq \alpha_n$ pour tout $n \geq 0$.

$\mathcal{FIN}$

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

EXERCICE.1

On pose, pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$,

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\operatorname{Log} t}, \qquad G(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\operatorname{Log} t}.$$

1°. Calculer $F(x)$.

2°. Montrer que

$$\forall\, x \in]0,1[, \qquad x^2F(x) \leq G(x) \leq xF(x).$$

3°. En déduire que les deux limites

$$\lim_{t \overset{>}{\to} 0} G(x) = \ell, \qquad \lim_{t \to 1} G(x) = L$$

existent et les calculer.

4°. En calculant la dérivée de G sur $]0,1[$, montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\operatorname{Log} t}\,dt$ a un sens et la calculer.

EXERCICE*.2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n, et $h_0, h_1, \ldots, h_n$ des nombres réels **distincts**. Montrer que $\{(X+h_k)^n\}_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

PROBLÈME

I

1°. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a

$$\sin(2n+1)\theta = (\sin\theta)^{2n+1} P_n(\operatorname{cotg}^2\theta),$$

où $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{2k+1} X^{n-k}$. (On pourrait penser à développer $e^{i(2n+1)\theta}$).

* Il est conseillé de traiter cet exercice apèrs le problème.

2°. On pose, pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_k = \operatorname{cotg}^2 \dfrac{\pi k}{2n+1}$.

a. Montrer que $P_n(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$.

b. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{n(2n-1)}{3}$.

c. Montrer que, pour $x \in]0, \pi/2[$, on a $\operatorname{cotg}^2 x \leq \dfrac{1}{x^2} \leq 1 + \operatorname{cotg}^2 x$.

d. En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge et que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$.

II

1°. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction indéfiniement dérivable. Pour $n \geq 1$ fixé, on pose

$$\forall\, t \in [0, 1], \qquad \varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (1-t)^k.$$

a. Calculer $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi'(t)$.

b. En déduire que

$$f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

2°. Soit $x \in]-1, 1[$. On définit

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t :\mapsto \operatorname{Log}(1 - tx).$$

a. Montrer que f est indéfiniement dérivable et calculer $f^{(n)}$.

b. En déduire que, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\left| \operatorname{Log}(1-x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \right| = |x|^{n+1} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1-tx} \right)^n \frac{dt}{1-tx}.$$

c. Calculer $\displaystyle\sup_{t\in[0,1]} \left(\frac{1-t}{1-tx} \right)$, et en déduire que, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\left| \operatorname{Log}(1-x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \right| \leq |x|^n \left| \operatorname{Log}(1-x) \right|. \qquad (*)$$

III

1°. Soient $x \in]0,1[$ et $n \geq 2$. Montrer en utilisant $(*)$ que

$$\left| \int_0^x \frac{\operatorname{Log}(1-t)}{t}\,dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k^2} \right| \leq I_n(x),$$

avec $I_n(x) = -\displaystyle\int_0^x \operatorname{Log}(1-t)t^{n-1}\,dt.$

2°. En notant que $t \mapsto \dfrac{t^n-1}{n}$ est une primitive de $t \mapsto t^{n-1}$ et en effectuant une intégation par parties, montrer que

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} I_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

3°. En déuire que, pour tout $n \geq 2$,

$$\left| \int_0^1 \frac{\operatorname{Log}(1-t)}{t}\,dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

4°. Conclure que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Log}(1-x)}{x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6}.$

IV

1°. Montrer que $x \mapsto \operatorname{Log} x \operatorname{Log}(1-x)$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$.

2°. Donner, sur $]0,1]$, une primitive de $x \mapsto \operatorname{Log} x$ qui s'annule en 1.

3°. Utiliser ce qui précède et le résultat de **III** pour trouver la valeure de

$$\int_0^1 \operatorname{Log}(x)\operatorname{Log}(1-x)\,dx.$$

$\mathcal{FIN}$

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

Exercice .1 Dans cet exercice on admet que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$, et on pose

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t\sqrt{t}}\exp(-\dfrac{1}{t}) & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

1°. Montrer que f admet une transformée de Laplace, et que son abscisse de croissance est égale à 0.

2°. Calculer $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\,dt$.

3°. On note $F = \mathcal{L}(f)$ la transformée de Laplace de f. Montrer que

$$\forall\, A \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, p \in \mathbb{R}_+^*, \qquad 0 \leq \sqrt{\pi} - F(p) \leq p\int_0^A tf(t)\,dt + \int_A^{\infty} f(t)\,dt.$$

4°. Montrer que F est une solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, du problème différentiel suivant:

$$\begin{cases} py''(p) + \dfrac{1}{2}y'(p) - y(p) = 0 \\ \lim\limits_{p\to 0} y(p) = \sqrt{\pi}, \quad \lim\limits_{p\to\infty} y(p) = 0 \end{cases}$$

5°. Résoudre le problème précédent en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{p}$.
En déduire, l'expression de F.

6°. On note, pour $a > 0$,

$$g_a(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{t}}\exp(-\dfrac{a}{t}) & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

Calculer $\mathcal{L}(g_a)$.

Exercice .2 Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = \pi e^{-2\pi|t|}$, et $g(t) = i\ \mathrm{sign}(t)\ f(t)$ où $\mathrm{sign}(t) = 1$ si $t \geq 0$ et $\mathrm{sign}(t) = -1$ si $t < 0$.

1°. Calculer les transformées de Fourier de f et de g.

2°. Simplifier l'expression de $\widehat{f}(\xi+1) + \widehat{g}(\xi+1) + \widehat{f}(\xi-1) - \widehat{g}(\xi-1)$.

3°. En déduire la fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie $\widehat{h} = \dfrac{1}{4+\xi^4}$.

4°. Trouver la fonction $h_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie $\widehat{h_\lambda} = \dfrac{1}{\lambda^4+\xi^4}$.

5°. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(4+\xi^4)^2}$.

FIN

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

Les deux exercices sont indépendants

EXERCICE .1 Si φ est un élément de $\mathcal{S}$, on note

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{|x|}}\, dx, \qquad \langle T_n, \varphi\rangle = \int_{-n}^{n} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{|x|}}\, dx \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

1°. Montrer que T et T_n sont des distributions tempérées.

2°. Montrer que $(T_n)_{n\geq 1}$ converge vers T dans $\mathcal{S}'$.

3°. On pose, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $G(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du$.

a. Montrer que $G(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} + \displaystyle\int_0^x \frac{\sin u}{2u\sqrt{u}}\, du$.

b. En déduire que $G(x)$ tend vers une limite ℓ quand x tend vers l'infini.

c. Montrer que $\ell > 0$. (On pourrait utiliser la relation suivante après l'avoir démontrée:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{2u\sqrt{u}}\, du = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2(n\pi + u)\sqrt{n\pi + u}}\, du\ ).$$

4°. On conserve les notations de 3°.

a. Montrer que, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, $\langle \widehat{T_n}, \varphi\rangle = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} G(2\pi n\,|x|) \frac{\varphi(x)}{\sqrt{|x|}}\, dx$.

b. En déduire $\widehat{T} = \ell \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, T$.

c. Utiliser la formule d'inversion pour trouver la valeur de ℓ. En déduire $\widehat{T}$.

EXERCICE .2 Soient k un entier fixé supérieur ou égal à 2, et $\omega = \exp(\frac{i\pi}{2k})$. On note, pour $z \in \mathbb{C}$, $F(z) = \exp(-z^k)$. Pour $R \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$I_R = \int_0^R F(x)\,dx, \quad J_R = \omega \int_0^R F(\omega x)\,dx, \quad K_R = iR \int_0^{\pi/(2k)} F(Re^{i\theta})\,e^{i\theta}\,d\theta.$$

1°. Montrer que $|K_R| \leq \dfrac{R}{k} \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-R^k \sin u}\,du$.

2°. En déduire que $|K_R| \leq \dfrac{\pi}{2kR^{k-1}}$. Quelle est $\lim\limits_{R\to\infty} K_R$?

3°. Montrer que $\lim\limits_{R\to\infty} I_R$ existe. Exprimer cette limite en utilisant la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ pour $(x > 0)$.

4°. En déduire que $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^k\,dx$, et $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^k\,dx$ convergent et exprimer leurs valeurs en utilisant la fonction Γ.

5°. Calculer en particulier $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^2\,dx$, et $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ en admettant la valeur de $\Gamma(1/2)$. Comparer à la valeur de ℓ obtenue dans l'exercice 1.

FIN

Omran Kouba

Problème de Mathématiques

EXERCICE .1 Pour $\varphi \in \mathcal{D}$ et $a > 0$ tel que $\operatorname{Supp} \varphi \subset [-a, a]$, on pose

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^a \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx + \varphi(0) \operatorname{Log} a.$$

1°. Montrer que la definition de $\langle T, \varphi \rangle$ ne dépend pas du choix de a.

2°. Montrer que T ainsi définie est une distribution.

3°. Montrer que le support de T est contenu dans $\mathbb{R}_+$.

4°. Déterminer xT' en fonction de T est de la distribution de Dirac à l'origine: δ.

5°. Déterminer une distribution U telle que $U' = T$.

EXERCICE .2 a étant un nombre réel positif, et δ_n est la distribution de Dirac au point $n \in \mathbb{Z}$. On considère les séries de distributions:

$$\begin{aligned} S_1 =& \sum_{n=0}^{\infty} a^n \delta_n, \\ S_2 =& \delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a^n \delta_n + a^{-n} \delta_{-n} \right). \end{aligned}$$

1°. Étudier la convergence de ces séries dans $\mathcal{D}'$, puis dans $\mathcal{E}'$, et enfin dans $\mathcal{S}'$.

2°. Calculer la transformée de Fourier de S_1 lorsque cette série converge dans $\mathcal{S}'$. Pour quelles valeurs de a cette transformée est elle une distribution régulière.

3°. On suppose $a = 1$, Calculer les transformées de fourier associées aux séries S_1 et S_2. Peut-on les exprimer comme les dérivées de distributions régulières.

EXERCICE .3 On se propose de calculer l'intégrale $I(p) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}\,dx$ lorsqu'elle converge.

1°. Soit Λ l'ensemble de nombres réels pour lesquels $I(p)$ converge. Déterminer Λ.

2°. Dans la suite on suppose $p \in \Lambda$. Considérons la fonction

$$f(z) = \frac{e^{(p+1)z}}{((e^z+1)^2+1)\,(e^z+1)}$$

et, pour $R > 0$, les intégrales

$$J_1(R) = \int_{-R}^{R} f(t)\,dt \qquad J_3(R) = \int_{-R}^{R} f(t+2\pi i)\,dt$$
$$J_2(R) = \int_0^{2\pi} f(R+it)\,dt \qquad J_4(R) = \int_0^{2\pi} f(-R+it)\,dt$$

a. Montrer en utilisant le théorème des résidus que, pour R assez grand,

$$J_1(R) + iJ_2(R) - J_3(R) - iJ_4(R) = 2\pi i e^{ip\pi}\left(1 - 2^{p/2}\cos\frac{\pi p}{4}\right).$$

b. Calculer $\lim\limits_{R\to\infty} J_2(R)$ et $\lim\limits_{R\to\infty} J_4(R)$.

c. Trouver une relation simple entre $J_1(R)$ et $J_3(R)$.

d. Trouver $\lim\limits_{R\to\infty} J_1(R)$.

e. En déduire, en effectuant un changement de variable, la valeur de $I(p)$.

FIN

OMRAN KOUBA

le 2 Janvier 2004