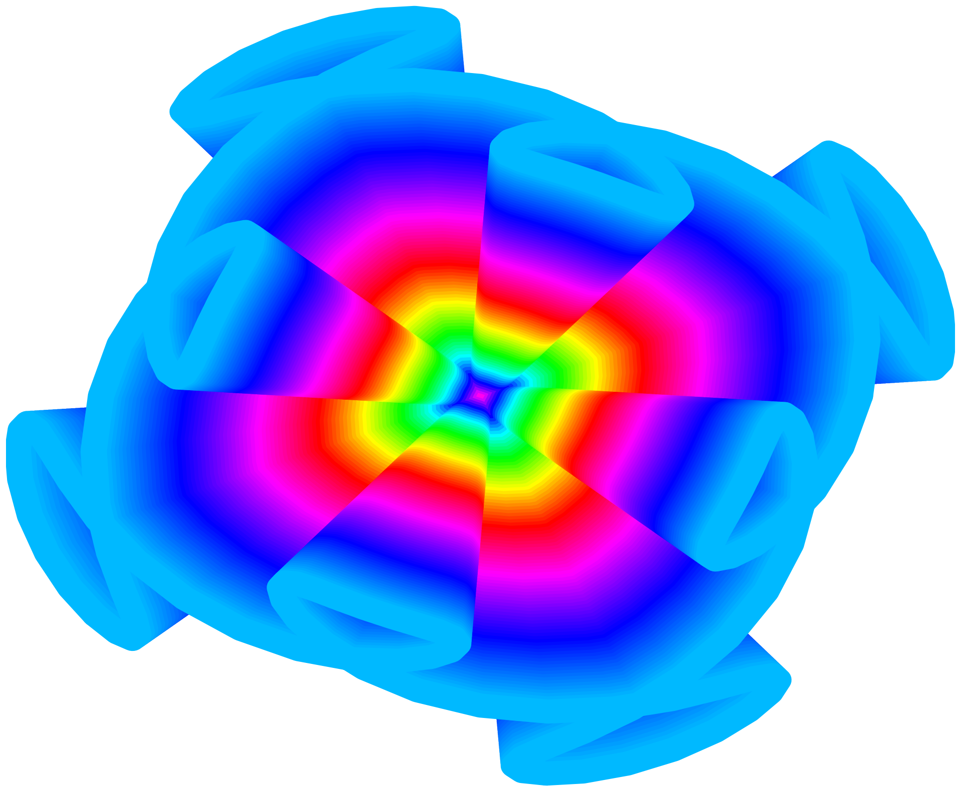
Introduction À
La Théotrie D'Intégration



Omran Kouba

le 25 Novembre 2005

Introduction

Les Théories de la mesure et de l'intégration ont été introduites par Lebesgue dans sa thèse (1904). Une idée fondamentale est que la mesure est σ-additive (voir §III.) ; pour Lebesgue, c'est un théorème, établi pour la mesure sur $\mathbb{R}$ qui attache à tout intervalle sa longueur (on l'appelle maintenant la mesure de Lebesgue) ; pour nous, ce sera un axiome, qu'il faudra vérifier ou admettre dans les situations concrètes.

A partir de la mesure (des ensembles) on définit l'intégrale (des fonctions). Le grand succès de l'intégrale selon Lebesgue, c'est la puissance et la simplicité de certains enoncés du type $\int \lim = \lim \int$, ou $\int \sum = \sum \int$, *etc.*.

A partir de l'intégrale, on définit des espaces fonctionnels que l'on désigne par L^1, L^2, *etc.*(L d'après Lebesgue). L'analyse fonctionnelles contemporaine ne se conçoit pas sans ces espaces fonctionnels.

Omran Kouba

Table Des Matières

I. Tribus de parties d'un ensemble

DÉFINITION.1 : Soit X un ensemble. On appelle une *tribu* sur X, ou une *tribu* de parties de X, toute sous-ensemble $\mathcal{A}$ de l'ensemble des parties de X, vérifiant les axiomes suivantes:

T$_1$: $\emptyset \in \mathcal{A}$.

T$_2$: $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$.

T$_3$: Si $\{A_n\}_{n\geq 0}$ est une suite de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{P}(X)$, c'est- à-dire l'ensemble des parties de X, est une tribu qui contient toutes les tribus sur X. $\{\emptyset, X\}$ est aussi une tribu qui est contenue dans toutes les tribus sur X. Il y a, bien sûr, d'autres exemples.

On appelle un couple $(X, \mathcal{A})$ formé d'un ensemble et d'une tribu sur cet ensemble un espace mesurable.

PROPRIÉTÉS.2 : Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

◇. $\forall\ (A, B) \in \mathcal{A}^2, \qquad A \cup B \in \mathcal{A}$.

◇. $\forall\ (A, B) \in \mathcal{A}^2, \qquad A \cap B \in \mathcal{A}$.

◇. $\forall\ (A, B) \in \mathcal{A}^2, \qquad A \setminus B \in \mathcal{A}$.

◇. $\forall\ (A, B) \in \mathcal{A}^2, \qquad A \Delta B \in \mathcal{A}$.

◇. $\forall\ \{A_n\}_{n\geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \qquad \bigcap\limits_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{A}$.

◇. $\forall\ \{A_n\}_{n\geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n = \bigcap_{n\geq 0} (\bigcup_{k\geq n} A_k) \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n = \bigcup_{n\geq 0} (\bigcap_{k\geq n} A_k) \in \mathcal{A}$$

PROPOSITION.3 : *Soit $(\mathcal{A}_\imath)_{\imath\in I}$ une famille de tribus sur un ensemble X. Alors l'ensemble $\mathcal{A} = \bigcap\limits_{\imath\in I} \mathcal{A}_\imath$ est aussi une tribu sur X.*

La vérification est immédiate.

DÉFINITION.4 : Soit $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$. On appelle tribu engendrée par $\mathcal{C}$ l'intersection $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ de toutes les tribus de X contenant $\mathcal{C}$.

$\mathcal{T}(\mathcal{C})$ est caractérisée par le fait qu'elle est une tribu contenant $\mathcal{C}$ et contenue dans toute tribu contenant $\mathcal{C}$.

DÉFINITION.5 : On appelle *tribu Borélienne* sur $\mathbb{R}$, la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$, et on la note $B_{\mathbb{R}}$. On appelle un borélien tout élément de $B_{\mathbb{R}}$

Il est clair que $B_{\mathbb{R}}$ contient les ouverts, les fermés les réunions de suites de fermés, les intersections dénombrables d'ouverts, *etc.*.

Soit A est une partie de $\mathbb{R}$. On appelle un borélien de A toute intersection de A avec un borélien de $\mathbb{R}$.

PROPOSITION.6 : *Si* $\mathcal{C} = \{]a, +\infty[;\quad a \in \mathbb{R}\}$, *alors* $\mathcal{T}(\mathcal{C}) = B_{\mathbb{R}}$.

PREUVE : Soit $b \in \mathbb{R}$. Comme $[b, +\infty[= \bigcap_{n\geq 1}]b-1/n, +\infty[$, alors $[b, +\infty[\in \mathcal{T}(\mathcal{C})$. D'autre part, pour tous $a < b$ dans $\mathbb{R}$ on a $]a, b[=]a, +\infty[\cap(\mathbb{R} \setminus [b, +\infty[)$. On conclut que $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ contient tous les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Finalement comme tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion d'une suite d'intervalles ouverts, alors $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ contient les ouverts de $\mathbb{R}$ et donc contient la tribu engendrée par les ouverts c'est-à- dire la tribu borélienne $B_{\mathbb{R}}$. L'inclusion inverse est immédiate car les éléments de $\mathcal{C}$ sont des ouverts. □

On démontre qu'il existe une bijection de $\mathbb{R}$ sur $B_{\mathbb{R}}$ (difficile), ce qui prouve l'existence de parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas boréliennes ; car on sait qu'il n'y a pas d'application surjective de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$.

On définit aussi la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^n$ comme la tribu engendrée par les pavés c'est-à-dire les ensembles de la forme $]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times\cdots]a_n, b_n[$.

PROPOSITION.7 : *Soit f une application d'un ensemble X dans un ensemble Y ; l'image réciproque par f d'une tribu sur Y est une tribu sur X.*

Si $\mathcal{A}$ est la tribu donnée sur Y, on notera $f^{-1}(\mathcal{A})$ la tribu "image réciproque ". la démonstration de cette proposition, ainsi que celle de la suivante, est simple et laissée au lecteur. Notons seulement que l'image directe d'une tribu n'est pas en général une tribu.

PROPOSITION.8 : *Soit f une application d'un ensemble X dans un ensemble Y, et soit $\mathcal{A}$ une tribu sur X. L'ensemble des parties B de Y telle qu'on ait $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ est une tribu sur Y appelée tribu induite de $\mathcal{A}$ par f.*

THÉORÈME.9 : *Soit f une application d'un ensemble X dans un ensemble Y et soit $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de Y. L'image réciproque par f de la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ est la tribu engendrée par l'image réciproque de $\mathcal{C}$:*

$$f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{C})) = \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{C})).$$

PREUVE : En effet, $f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{C}))$ est une tribu contenant $f^{-1}(\mathcal{C})$ et par consequent on a $\mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{C}))$.

Pour obtenir l'inclusion opposée appelons $\mathcal{T}'$ la tribu induite de $\mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{C}))$ par f (Proposition 8.) c'est-à-dire l'ensemble des parties B de Y vérifiant $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{C}))$. Evidemment $\mathcal{T}'$ contient $\mathcal{C}$ et par conséquent $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{T}'$, et par suite on a bien $f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\mathcal{T}') \subset \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{C}))$. □

II. Fonctions mesurables

DÉFINITION.1 : Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Une application $f : X \to Y$ est dite *mesurable* (ou $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable s'il est utile de préciser) si l'image réciproque par f de tout élément de $\mathcal{B}$ est un élément de $\mathcal{A}$.

Ce qui revient à dire $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$.

Une application mesurable $f : (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ est appelée une application borélienne. Et si f est à valeurs complexes, elle sera dite borélienne si sa partie réelle ainsi que sa partie imaginaire sont boréliennes

PROPOSITION.2 : *Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables, et soit $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de Y engendrant la tribu $\mathcal{B}$. Pour qu'une application $f : X \to Y$ soit mesurable il faut, et il suffit, que $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ pour tout élément $C \in \mathcal{C}$.(symboliquement $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$).*

PREUVE : En effet, d'après le théorème I.9 on a $f^{-1}(\mathcal{B}) = f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{C})) = \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{C}))$ ce qui démontre immédiatement la proposition. □

Corollaire.3 : *Une application* $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ *est mesurable si, et seulement si,* $\forall\ a \in \mathbb{R},\quad f^{-1}(]-\infty, a[) \in \mathcal{A}$ *ou si, et seulement si,* $\forall\ a \in \mathbb{R},\quad f^{-1}(]-\infty, a]) \in \mathcal{A}$.

Corollaire.4 : *Une fonction continue sur une partie* A *de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *(ou dans* $\mathbb{C}$*), est borélienne.*

Car pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, a[)$ est un ouvert relatif de A.

Si A est une partie de X, on appelle fonction indicatrice de A, la fonction $\mathbb{1}_A$ définie par $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$, et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

Il est clair que si $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, alors il y a équivalence entre le fait que $A \in \mathcal{A}$ et le fait que $\mathbb{1}_A : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ soit mesurable.

Proposition.5 : *Soient* $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$, $(Z, \mathcal{C})$, *trois espaces mesurables ; et considérons deux applications mesurables* $f : X \longrightarrow Y$ *et* $g : Y \longrightarrow Z$. *Alors* $g \circ f : X \longrightarrow Z$ *est mesurable.*

C'est evident.

Proposition.6 : *Si* f, g *sont deux fonctions mesurables de* $(X, \mathcal{A})$ *dans* $\mathbb{R}$, *et si* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors* λf, $f + g$, *et* fg *sont aussi mesurables.*

Preuve :

- Soit $h_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \lambda x$, h_λ est continue donc borélienne et par conséquent $h_\lambda \circ f$ est aussi mesurable d'où λf est mesurable.
- Soit $h = f + g$, on a

$$
\begin{aligned}
x \in h^{-1}(]-\infty, a[) &\Longleftrightarrow \exists\, r \in \mathbb{Q}\ :\ f(x) < r < a - g(x) \\
&\Longleftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z},\ \exists p \in \mathbb{N}^*\ :\ f(x) < \frac{n}{p} \text{ et } g(x) < a - \frac{n}{p} \\
&\Longleftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z},\ \exists p \in \mathbb{N}^*\ :\ x \in f^{-1}(]-\infty, \frac{n}{p}[) \text{ et} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \in g^{-1}(]-\infty, a - \frac{n}{p}[) \\
&\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ p \in \mathbb{N}^*}} \left\{ f^{-1}(]-\infty, \frac{n}{p}[) \bigcap g^{-1}(]-\infty, a - \frac{n}{p}[) \right\}
\end{aligned}
$$

et par conséquent

$$h^{-1}(]-\infty,a[) = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ p\in\mathbb{N}^*}} \left\{ f^{-1}(]-\infty,\frac{n}{p}[)\bigcap g^{-1}(]-\infty,a-\frac{n}{p}[)\right\}$$

donc pour tout $a\in\mathbb{R}$, $h^{-1}(]-\infty,a[)\in\mathcal{A}$, et h est mesurable.

– Le cas de fg peut être traité similairement. On commence par le cas $f\geq 0$ et $g\geq 0$, et on conclue en remarquant que toute fonction mesurable à valeurs réelles est la différence de deux fonctions mesurables positives. Nous laissons les détails au lecteur intéressé. □

Remarque : En séparant partie imaginaire et partie réelle, on constate facilement que la proposition précédente reste valable dans le cas de fonctions à valeurs complexes.

Proposition.7 :*Si $\{f_n\}_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions mesurables de $(X,\mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) qui converge simplement vers une fonction f. Alors $f:(X,\mathcal{A})\longrightarrow\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est mesurable.*

Preuve : supposons que les fonctions considérées sont à valeurs reelles le cas complexe s'obtient en séparant partie réelle et partie imaginaire. Notons $h_n(x)=\sup\{f_k(x)\mid k\geq n\}$. Comme pour tout x de X la suite $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ alors

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x) = \inf\{h_n(x)\mid n\in\mathbb{N}\}.$$

Soient $a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x\in h_n^{-1}(]-\infty,a]) &\Longleftrightarrow \forall\ k\geq n \ :\ f_k(x)\leq a \\ &\Longleftrightarrow \forall\ k\geq n \ :\ x\in f_k^{-1}(]-\infty,a]) \\ &\Longleftrightarrow x\in\bigcap_{k\geq n} f_k^{-1}(]-\infty,a]) \end{aligned}$$

alors on a

$$h_n^{-1}(]-\infty,a]) = \bigcap_{k\geq n} f_k^{-1}(]-\infty,a])$$

d'où $h_n^{-1}(]-\infty,a])\in\mathcal{A}$ pour tout $a\in\mathbb{R}$, et h_n est mesurable pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}([a,+\infty[) &\Longleftrightarrow \forall\ n \geq 0 \ \ : \ h_n(x) \geq a \\ &\Longleftrightarrow \forall\ n \geq 0 \ \ : \ x \in h_n^{-1}([a,+\infty[) \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{n \geq 0} h_n^{-1}([a,+\infty[) \end{aligned}$$

alors on a

$$f^{-1}([a,+\infty[) = \bigcap_{n \geq 0} h_n^{-1}([a,+\infty[)$$

d'où $f^{-1}([a,+\infty[) \in \mathcal{A}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, et f est mesurable. □

DÉFINITION.8 : Une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur un espace mesurable $(X,\mathcal{A})$ est dite *étagée* si elle est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Les fonctions étagées sont donc les combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices d'ensembles mesurables ; ce sont les fonctions pouvant se mettre sous la forme $f = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ où les A_i sont des éléments de $\mathcal{A}$.

REMARQUE : Si f est étagée alors elle s'écrit d'une manière unique sous la forme $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \beta_i \mathbb{1}_{B_i}$ où les $\{\beta_i\}_i$ sont deux à deux distincts et les $\{B_i\}_i$ forment une partition de X en ensembles mesurables.

Notons enfin que la somme et le produit de deux fonctions étagées sont étagées.

THÉORÈME.9 : *Soit $f : (X,\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable. Il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions étagées positives définies sur $(X,\mathcal{A})$ telle que:*

1°. $\forall\ x \in X,\ \forall\ n \geq 1, \qquad f_n(x) \leq f_{n+1}(x).$

2°. $\forall\ x \in X, \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$

PREUVE : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ considérons la fonction $J_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{[k/2^n,(k+1)/2^n[}(x) + 2^n \mathbb{1}_{[2^n,+\infty[}(x)$$

Etudions quelques propriétés de cette fonction.

1°. Pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $J_n(x) \leq J_{n+1}(x)$.

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$, distinguons plusieurs cas:

— Si $2^{n+1} \leq x$ alors, $J_n(x) = 2^n < 2^{n+1} = J_{n+1}(x)$.

— Si $2^n \leq x < 2^{n+1}$ alors il existe $k \in \{2^{2n+1}, 2^{2n+1}+1, \ldots, 2^{2n+2}-1\}$ tel que x soit dans l'intervalle $[k/2^{n+1}, (k+1)/2^{n+1}[$ et donc $J_n(x) = 2^n \leq k/2^{n+1} = J_{n+1}(x)$.

— Si $0 \leq x < 2^n$ alors il existe $k \in \{0, 1, \ldots, 2^{2n+1}-1\}$ tel que x soit dans l'intervalle $[k/2^{n+1}, (k+1)/2^{n+1}[$ et donc soit $k = 2p$ auquel cas $x \in [p/2^n, (p+1)/2^n[$ et $J_n(x) = p/2^n = k/2^{n+1} = J_{n+1}(x)$; soit $k = 2p+1$ auquel cas $x \in [p/2^n, (p+1)/2^n[$ et $J_n(x) = p/2^n < k/2^{n+1} = J_{n+1}(x)$.

2°. Pour tout $x \in [0, 2^n]$ on a $x - 1/2^n \leq J_n(x) \leq x$.

Car si $x \in [0, 2^n[$ il existe $k \in \{0, 1, \ldots, 2^{2n}-1\}$ tel que x soit dans l'intervalle $[k/2^n, (k+1)/2^n[$ et par conséquent $x - 1/2^n \leq k/2^n \leq x$ et $J_n(x) = k/2^n$ d'où le résultat.

Considérons $f_n(x) = J_n \circ f(x)$. Clairement f_n est mesurable comme composée de fonctions mesurables ; elle est aussi étagée car J_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

D'autre part, d'après la propriété 1°. pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

Finalement, soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 > 0$ tel que $2^{n_0} > f(x)$ et donc pour tout $n \geq n_0$, on a $f(x) \in [0, 2^n]$ et donc par la propriété 2°. on a

$$\forall\, n > n_0, \qquad f(x) - \frac{1}{2^n} \leq f_n(x) \leq f(x)$$

et par conséquent $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$. Ceci achève la démonstration du théorème. □

Remarque :

— Si l'on suppose de plus que f est bornée, alors la suite f_n converge uniformément vers f.

— Si f est une fonction mesurable à valeurs réelles alors f est limite simple d'une suite de fonctions étagées. En effet, $f = f^+ - f^-$ où $f^+(x) = \max(f(x), 0)$, $f^-(x) = -\min(f(x), 0)$. On utilise alors le résultat précédent appliqué aux deux fonctions positives f^+ et f^-.

III. Mesures positives sur un espace mesurable

Définition.1 : Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On appelle *mesure* (positive) sur $(X, \mathcal{A})$ une application μ de $\mathcal{A}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant les deux axiomes suivants:

M_1. $\mu(\emptyset) = 0$.

M_2. Si $\{A_n\}_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, on a

$$\mu(\bigcup_{n\geq 0} A_n) = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n).$$

La propriété M_2 est dite σ-additivité, la propriété M_1 peut être remplacée par la suivante: μ n'est pas identiquement égale à $+\infty$. (Pourquoi ?.)

Exemples :

1°. Mesure de Dirac : Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et soit $a \in X$. On appelle *mesure de Dirac en* a, la mesure δ_a définie par $\delta_a(A) = 1$ si $a \in A$ et $\delta_a(A) = 0$ si $a \notin A$. Il est immédiat de vérifier que δ_a est une mesure positive.

2°. Mesure de décompte: Ici l'espace mesurable est $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. On appelle mesure de décompte, la mesure ν définie par $\nu(A) = +\infty$ si A est une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $\nu(A) = \text{Card}\,(A)$ si A est une partie finie de $\mathbb{N}$. Il n'est pas difficile de vérifier que ν est une mesure positive.

3°. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs. On peut définir une mesure μ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ de la manière suivante: si $A = \emptyset$ on pose $\mu(A) = 0$, et si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ non-vide alors $\mu(A) = \sum_{n\in A} a_n$. La vérification du fait que μ est une mesure est laissée en exercice au lecteur. Notons seulement que la mesure de décompte est un cas particulier qui correspond à $a_n = 1$ pour tout n.

4°. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$: C'est l'unique mesure λ sur $B_{\mathbb{R}}$ qui associe à chaque intervalle borné $]a, b[$ une valeur égale à sa longueur *i.e.* $b-a$. Nous admettons l'existence et l'unicité de cette mesure (qui sont des théorèmes difficiles).

Il est bien connu que tout ensemble ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ est la réunion d'une suite d'intervalles ouverts $\{I_n\}_{n\geq 0}$ qui sont deux à deux disjoints (certains de ces intervalles pouvant être vides), et alors $\lambda(\mathcal{O}) = \sum_{n\geq 0} \lambda(I_n)$. D'autre part la mesure de Lebesgue λ vérifie la propriété (dite de régularité) qui permet de calculer la mesure d'un borélien:

$$\forall\ A \in B_{\mathbb{R}}, \qquad \lambda(A) = \inf\{\lambda(\mathcal{O}) \mid \mathcal{O} \text{ ouvert contenant } A\}$$
$$= \sup\{\lambda(\mathcal{K}) \mid \mathcal{K} \text{ compact contenu dans } A\}$$

Propriétés des mesures positives :

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, c'est-à-dire un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ muni d'une mesure μ.

1°. Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, on a

$$\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

$$\mu(A \bigcup B) + \mu(A \bigcap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

2°. Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, on a

$$A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B).$$

3°. Soit $\{A_n\}_{n\geq 0}$ une suite de $\mathcal{A}$. Alors

$$\mu(\bigcup_{n\geq 0} A_n) \leq \sum_{n\geq 0} \mu(A_n).$$

4°. Soit $\{A_n\}_{n\geq 0}$ une suite croissante de $\mathcal{A}$ ($i.e.\ \forall\ n, \quad A_n \subset A_{n+1}$). Alors

$$\mu(\bigcup_{n\geq 0} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

5°. Soit $\{A_n\}_{n\geq 0}$ une suite décroissante de $\mathcal{A}$ ($i.e.\ \forall\ n, \quad A_{n+1} \subset A_n$). Si $\mu(A_0) < +\infty$, alors

$$\mu(\bigcap_{n\geq 0} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Preuve : La démonstration de ces différentes propriétés est simple ; signalons seulement que la condition $\mu(A_0) < +\infty$ dans la propriété 5° est indispensable, en effet, si $A_n = [n, +\infty[$

alors, $\lambda(\bigcap A_n) = \lambda(\emptyset) = 0$ et pour tout n on a $\lambda(A_n) = +\infty$.(λ étant la mesure de Lebesgue.) □

Considérons, par exemple, le cas de la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\lambda(\{a\}) = \lim_{n\to+\infty} \lambda(]a-1/n, a+1/n[) = \lim_{n\to+\infty} 2/n = 0$. Par conséquent $\lambda(]a,b[) = \lambda([a,b[) = \lambda([a,b])$. D'autre part si A est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ alors $\lambda(A) = 0$, par exemple $\lambda(\mathbb{N}) = 0$ et $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

Définition.2 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'une partie $B \subset X$ est négligeable (ou μ-négligeable s'il est utile de préciser) si et seulement s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $B \subset A$ et $\mu(A) = 0$.

Il n'est pas difficile de voir que toute partie d'un ensemble négligeable est négligeable et que toute réunion d'une suite d'ensembles négligeables est négligeable.

Notation: Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'une propriété a lieu presque partout sur X (μ-presque partout s'il est utile de préciser) si l'ensemble des points de X en lesquels elle tombe en défaut est μ-négligeable.

IV. Intégration, fonctions intégrables

Dans cette partie on se donne une fois pour toutes un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

IV.1. Intégration d'une fonction étagée positive.

On notera $\mathcal{E}^+$ l'ensemble des fonctions étagées positives sur $(X, \mathcal{A})$.

Définition.1 : Soit $f \in \mathcal{E}^+$, on appelle l'intégrale de f par rapport à la mesure μ l'élément de $\overline{\mathbb{R}}^+$ défini par

$$\int f(x)\, d\mu(x) = \int f\, d\mu = \sum_{\alpha\in\mathbb{R}} \alpha\mu(f^{-1}(\{\alpha\}),$$

avec la convention $0 \times (+\infty) = 0$ (pour définir $\alpha\mu(f^{-1}(\{\alpha\})$ lorsque $\alpha = 0$). Notons que cette somme est bien définie car f ne prend qu'un nombre fini de valeurs et par conséquent tous les termes de la somme sont nuls sauf un nombre fini. Autrement dit si $f = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$ avec $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}^+$ deux à deux distincts et $B_1, B_2, \ldots, B_m \in \mathcal{A}$ deux à deux disjoints alors

$$\int f\, d\mu = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu(B_k).$$

Notons que si $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ avec seulement $A_1, A_2, \ldots, A_n$ deux à deux disjoints alors on a aussi

$$\int f\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k).$$

En effet, si les α_k's sont deux à deux distincts alors c'est la définition même de l'intégrale. Dans le cas général on considère une relation d'équivalence $\Re$ sur $\{1, 2, \ldots, n\}$ définie par $i \,\Re\, j \iff \alpha_i = \alpha_j$, et on note $\{I_k\}_{k \le p}$ les classes d'équivalence modulo cette relation. On pose β_k la valeur commune de tous les α_i pour $i \in I_k$ et $B_k = \bigcup_{i \in I_k} A_i$ alors $f = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$ avec $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}^+$ deux à deux distincts et $B_1, B_2, \ldots, B_m \in \mathcal{A}$ deux à deux disjoints d'où

$$\begin{aligned} \int f\, d\mu &= \sum_{k=1}^{p} \beta_k \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{p} \beta_k \sum_{i \in I_k} \mu(A_i) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{i \in I_k} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i). \end{aligned}$$

Définition.2 : On dira qu'une fonction étagée positive f est intégrable si et seulement si $\int f\, d\mu < +\infty$ (ceci est équivalent à $\mu(f^{-1}(]0, +\infty[) < +\infty$).

Propriétés.3 :

1°. Croissance : Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{E}^+$. Alors

$$f \le g \Longrightarrow \int f\, d\mu \le \int g\, d\mu.$$

Preuve : Soient $f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ avec $A_1, A_2, \ldots, A_m$ une partition de l'ensemble X, et

$g = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$ avec $B_1, B_2, \ldots, B_n$ une partition de l'ensemble X. On pose

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \alpha_i & \text{si} \quad A_i \cap B_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \beta_{ij} = \begin{cases} \beta_j & \text{si} \quad A_i \cap B_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $f = \sum \alpha_{ij} \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$ et $g = \sum \beta_{ij} \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$. D'après l'hypothèse on a $\forall\, i, j \quad \alpha_{ij} \leq \beta_{ij}$, d'où

$$\int f\, d\mu = \sum \alpha_{ij} \mu(A_i \cap B_j) \leq \sum \beta_{ij} \mu(A_i \cap B_j) = \int g\, d\mu. \qquad \square$$

2°. Additivité : Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{E}^+$. Alors

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

Preuve : Supposons que

$$f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$$

avec $A_1, A_2, \ldots, A_m$ une partition de X, et $g = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$ avec $B_1, B_2, \ldots, B_n$ une partition de X. Alors on a $f + g = \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$ et

$$\begin{aligned} \int (f+g)\, d\mu &= \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_i \alpha_i \sum_j \mu(A_i \cap B_j) + \sum_j \beta_j \sum_i \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_i \alpha_i \mu(A_i) + \sum_j \beta_j \mu(B_j) \\ &= \int f\, d\mu + \int g\, d\mu. \end{aligned} \qquad \square$$

3°. Homogénéité : Soient f une fonction de $\mathcal{E}^+$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Alors

$$\int \lambda f\, d\mu = \lambda \int f\, d\mu.$$

La preuve est simple et laissée au lecteur.

Notation: Soit $A \in \mathcal{A}$ une partie mesurable. On note $\displaystyle\int_A f\,d\mu$ pour désigner $\int f \mathbb{1}_A\,d\mu$. Il est immédiat de voir que si f est une fonction de $\mathcal{E}^+$ et $A, B \in \mathcal{A}$ deux parties mesurables telles que $\mu(A \cap B) = 0$ alors

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.$$

Nous allons maintenant établir un lemme très simple qui se trouve être un outil essentiel pour l'étude de l'intégrale d'une fonction mesurable positive:

Lemme.4 : *Soient $f \in \mathcal{E}^+$ et $\{E_n\}_{n\geq 1}$ une suite croissante de $\mathcal{A}$ (i.e. $E_n \subset E_{n+1}$) telle que $\displaystyle\bigcup_{n\geq 1} E_n = X$. Alors*

$$\int f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} f\,d\mu.$$

Preuve : Soit $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ avec $A_1, A_2, \ldots, A_m$ deux à deux disjoints. Alors

$$\int_{E_n} f\,d\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap E_n) \qquad (*)$$

or la suite $\{A_i \cap E_n\}_{n\geq 1}$ est une suite croissante de parties mesurables avec $\displaystyle\bigcup_{n\geq 1}(A_i \cap E_n) = A_i$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mu(A_i \cap E_n) = \mu(A_i)$ donc en passant à la limite dans la somme finie $(*)$ on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} f\,d\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i) = \int f\,d\mu. \qquad \square$$

IV.2. Intégrale d'une fonction mesurable positive.

Notons $\mathcal{M}^+$ l'ensemble des fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}^+$. On rappelle que les éléments de $\mathcal{M}^+$ sont les limites simples de suites croissantes d'éléments de $\mathcal{E}^+$.

DÉFINITION.1 : Soit $f \in \mathcal{M}^+$, on appelle l'intégrale de f par rapport à μ (et on écrit $\int f \, d\mu$ ou $\int f(x) \, d\mu(x)$) l'élément de $\overline{\mathbb{R}}^+$ défini par

$$\int f \, d\mu = \sup \{ \int \phi \, d\mu \mid \text{avec} \ \ \phi \in \mathcal{E}^+, \phi \leq f \}.$$

On dit que $f \in \mathcal{M}^+$ est intégrable si et seulement si $\int f \, d\mu < +\infty$.

THÉORÈME.2 : *(De la convergence croissante): Soit $\{f_n\}_{n \geq 0}$ une suite croissante de $\mathcal{M}^+$ convergente simplement vers $f \in \mathcal{M}^+$. Alors*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu \leq +\infty$$

PREUVE : On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad f_n \leq f_{n+1} \leq f$ donc

$$\forall \ n \in \mathbb{N}, \qquad \int f_n \, d\mu \leq \int f_{n+1} \, d\mu \leq \int f \, d\mu$$

et par conséquent $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$.

D'autre part, soit ϕ une fonction étagée positive telle que $\phi \leq f$, et soit $\lambda \in [0, 1[$. On pose $E_n = \{x \mid f_n(x) \geq \lambda \phi(x)\}$. Comme $f_n \geq \lambda \mathbb{1}_{E_n} \phi$ on a $\displaystyle\int f_n \, d\mu \geq \lambda \int_{E_n} \phi \, d\mu$. Mais la suite $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $\displaystyle\bigcup_{n \geq 0} E_n = X$ donc d'après le lemme IV.1.4 on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_{E_n} \phi \, d\mu = \int \phi \, d\mu$ et par conséquent $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu \geq \lambda \int \phi \, d\mu$. Or $\lambda \in [0, 1[$ est arbitraire d'où $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu \geq \int \phi \, d\mu$. En prenant la borne supérieure pour toutes les fonctions étagées positives ϕ inférieures à f on obtient $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu \geq \int f \, d\mu$, d'où le résultat. $\square$

PROPRIÉTÉS.3 :

1°. Croissance : Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{M}^+$. Alors

$$f \leq g \Longrightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

C'est evident.

2°. Additivité : Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{M}^+$. Alors

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

PREUVE : Soient $\{f_n\}_n$ et $\{g_n\}_n$ deux suites croissantes de $\mathcal{E}^+$ telles que $\lim f_n = f$ et $\lim g_n = g$ (théorème II.9). Alors $\{f_n + g_n\}_n$ est une suite de $\mathcal{E}^+$ tendant en croissant vers $f+g$ donc comme $\int (f_n+g_n)\, d\mu = \int f_n\, d\mu + \int g_n\, d\mu$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors en utilisant le théorème IV.2.2 on obtient le résultat demandé. □

3°. Homogénéité : Soient f une fonction de $\mathcal{M}^+$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Alors

$$\int \lambda f\, d\mu = \lambda \int f\, d\mu.$$

La preuve est simple et laissée au lecteur.

PROPOSITION.4 : *Soit $f \in \mathcal{M}^+$. Alors*

$$\int f\, d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \quad \mu\text{-presque partout}$$

PREUVE : Si f est étagée, le résultat est clair. Soit $f \in \mathcal{M}^+$ telle que $f(x) = 0 \quad \mu$-p.p. Alors

$$\forall\ \phi \in \mathcal{E}^+, \qquad \phi \le f \Longrightarrow \phi = 0 \ \ \mu\text{-p.p.} \Longrightarrow \int \phi\, d\mu = 0$$

et donc $\int f\, d\mu = \sup\{\int \phi\, d\mu \mid \phi \in \mathcal{E}^+ \text{ et } \phi \le f\} = 0$.

Inversement, soit $f \in \mathcal{M}^+$ telle que $\int f\, d\mu = 0$. On considère $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{E}^+$ tendant en croissant vers f. On a pour tout n, $0 \le \int \phi_n\, d\mu \le \int f\, d\mu = 0$ et par conséquent $\phi_n = 0 \quad \mu$-p.p. pour tout n, car ϕ_n est étagée. Notons $A_n = \{x \mid \phi_n(x) \ne 0\}$. Alors $\mu(A_n) = 0$ et si $A = \bigcup A_n$ on a $\mu(A) = 0$. Pour tout $x \notin A$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\phi_n(x) = 0$ donc $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \phi_n(x) = 0$ d'où $\forall\ x \notin A, \quad f(x) = 0$ c'est à dire $f = 0 \quad \mu$-p.p. □

COROLLAIRE.5 : *Soient $f, g \in \mathcal{M}^+$. Alors*

$$f = g \quad p.p. \Longrightarrow \int f\, d\mu = \int g\, d\mu.$$

PREUVE : Notons $h = \inf(f,g) \in \mathcal{M}^+$ et $k = f - h \in \mathcal{M}^+$ et $\ell = g - h \in \mathcal{M}^+$. Clairement $k = 0$ p.p. et $\ell = 0$ p.p. donc $\int \ell\, d\mu = 0$, $\int k\, d\mu = 0$. Mais $g = h + \ell$ et $f = h + k$ donc $\int g\, d\mu = \int h\, d\mu = \int f\, d\mu$. □

IV.3. L'espace $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

DÉFINITION.1 : Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que f est *intégrable* (ou μ-*intégrable* s'il est utile de préciser) si, et seulement si,

- f est mesurable.
- $\int |f| \, d\mu < +\infty$.

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles, on note $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = -\min(f, 0)$. Si f est mesurable alors f^+ et f^- le sont aussi, en fait $f^+, f^- \in \mathcal{M}^+$ et on a $|f| = f^+ + f^-$ et $f = f^+ - f^-$.

DÉFINITION.2 : Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On appelle *intégrale* de f le nombre réel (noté $\int f \, d\mu$) défini par

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable. On appelle *intégrale* de f le nombre complexe (noté $\int f \, d\mu$) défini par

$$\int f \, d\mu = \int \operatorname{Re}(f) \, d\mu + i \int \operatorname{Im}(f) \, d\mu.$$

DÉFINITION.3 : Si $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Dans le cas où il n'y a pas d'ambiguïté on écrit seulement $\mathcal{L}^1(\mu)$.

REMARQUE : Si deux fonctions intégrables f et g sont égales presque partout alors $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$. Ce qui nous permet en générale de ne pas distinguer entre f et g.

THÉORÈME.4 : *$\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace vectoriel.*

C'est immédiat.

Proposition.5 : *Soient* $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. *Alors*

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

Preuve : Si f et g sont à valeurs réelles on a

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

d'où

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

l'additivité de l'intégrale des fonctions positives donne

$$\int (f+g)^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu + \int g^-\, d\mu = \int (f+g)^-\, d\mu + \int f^+\, d\mu + \int g^+\, d\mu$$

et par conséquent

$$\int (f+g)^+\, d\mu - \int (f+g)^-\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu + \int g^+\, d\mu - \int g^-\, d\mu.$$

d'où le résultat.

Si f et g sont à valeurs complexes, on utilise le fait simple

$$\mathrm{Re}\,(f+g) = \mathrm{Re}\,(f) + \mathrm{Re}\,(g) \quad ; \quad \mathrm{Im}\,(f+g) = \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Im}\,(g). \qquad \square$$

Proposition.6 : *Soient* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors*

$$\int (\lambda f)\, d\mu = \lambda \int f\, d\mu.$$

La vérification est immédiate en distinguant les cas $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\lambda = -1$ et $\lambda = i$.

PROPOSITION.7 : *Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Alors,*

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$$

avec égalité si, et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = e^{i\theta} |f(x)|$ μ-p.p.

PREUVE : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int f \, d\mu = e^{i\theta} \left| \int f \, d\mu \right|$$

alors on peut écrire

$$\left| \int f \, d\mu \right| = e^{-i\theta} \int f \, d\mu = \mathrm{Re}\,(\int e^{-i\theta} f \, d\mu) = \int \mathrm{Re}\,(e^{-i\theta} f) \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu$$

avec égalité si et seulement si $\int \mathrm{Re}\,(e^{-i\theta} f) \, d\mu = \int |f| \, d\mu$ et donc si et seulement si $\mathrm{Re}\,(e^{-i\theta} f(x)) = |f(x)|$ μ-presque partout,ce qui est équivalent à la condition $f(x) = e^{i\theta} |f(x)|$ μ-presque partout. □

V. Théorèmes de convergence, applications

Dans la suite on fixe un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

V.1. Théorèmes de convergence.

PROPOSITION.1 : *Soit $\{u_n\}_{n \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives, telle que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ converge pour presque tout $x \in X$. On note $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ lorsque cette somme existe. Alors*

$$\int u(x) \, d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int u_n(x) \, d\mu(x).$$

PREUVE : En effet, il suffit d'appliquer le théorème IV.2.2 à la suite de fonctions $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$. □

PROPOSITION.2 : *Soit $\{f_n\}_{n\geq 0}$ une suite croissante de fonctions de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. On suppose que pour presque tout x la suite $\{f_n(x)\}_{n\geq 0}$ est bornée alors*

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \int(\lim_{n\to\infty} f_n)\,d\mu \leq +\infty$$

PREUVE : En effet, il suffit de se ramener au cas des fonctions positives en considérant la suite $\{f_n - f_0\}_{n\geq 0}$. □

THÉORÈME.3 : *(de convergence dominée). Soit $\{f_n\}_{n\geq 0}$ une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, et soit $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$. On suppose que*

1°. *Pour tout $n \geq 0$ la fonction f_n est mesurable.*

2°. *Pour presque tout $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.*

3°. *Il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, telle que pour tout $n \geq 1$ et pour presque tout $x \in X$ on a $|f_n(x)| \leq g(x)$.*

Alors, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$,et $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu$.

PREUVE : Quitte à remplacer X par $X \setminus \mathcal{N}$ où $\mathcal{N}$ est un ensemble négligeable, on peut supposer que Pour tout $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Pour tout $n \geq 0$ la fonction f_n est mesurable, et $|f_n(x)| \leq g(x)$ donc $f_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$. De même on obtient par passage à la limite simple que la fonction f est mesurable, et que $|f(x)| \leq g(x)$ donc $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$.

On note

$$h_n(x) = \inf_{k\geq n}\big(2g(x) - |f_k(x) - f(x)|\big).$$

La suite $\{h_n\}_{n\geq 0}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives donc

$$\begin{aligned}2\int g\,d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int h_n\,d\mu\\ &=2\int g\,d\mu - \lim_{n\to\infty}\int \sup_{k\geq n}|f_k(x) - f(x)|\,d\mu(x)\end{aligned}$$

d'où $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int \sup_{k\geq n}|f_k(x) - f(x)|\,d\mu(x) = 0$, ce qui implique le fait que

$$\lim_{n\to\infty}\int |f_n(x) - f(x)|\,d\mu(x) = 0.$$

Finalement, on a le résultat, en notant que

$$\left|\int f(x)\,d\mu - \int f_n(x)\,d\mu\right| \leq \int |f_n(x) - f(x)|\,d\mu(x).$$ □

V.2. Applications.

Le théorème de convergence dominée permet d'établir très rapidement des propriétés de régularité (continuité et dérivabilité) de certaines fonctions définies par des intégrales ; même dans les cas classiques les démonstrations reposant sur ce théorème sont souvent plus simples que les démonstrations élémentaires usuelles.

tm1: *(de continuité par rapport au paramètre). Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, B une partie de $\mathbb{R}$. Soit $f : X \times B \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction vérifiant les conditions suivantes:*

1°. *Pour tout $\beta \in B$, la fonction $x \mapsto f(x, \beta)$ est mesurable.*

2°. *Pour presque tout $x \in X$ la fonction $\beta \mapsto f(x, \beta)$ est continue au point $\beta_0 \in B$.*

3°. *Il existe une fonction intégrable g telle que pour tout $\beta \in B$ et pour presque tout $x \in X$, $|f(x, \beta)| \leq g(x)$.*

Alors, la fonction $\beta \mapsto F(\beta) = \int f(x, \beta)\, d\mu(x)$ est continue au point β_0.

Preuve : Soit $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de B convergente vers β_0 et posons $\phi_n(x) = f(x, \alpha_n)$ et $\phi(x) = f(x, \beta_0)$. D'après 3°. on a pour tout $n \geq 0$, $|\phi_n| \leq g \quad p.p$ et d'après 2°. $\phi_n(x)$ converge vers $\phi(x)$ pour presque tout x. Comme les ϕ_n's sont mesurables, on est dans les conditions d'application du théorème de convergence dominée, donc on trouve

$$F(\beta_0) = \int \phi(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} F(\alpha_n)$$

d'où la continuité de F au point β_0. □

Exemples :

1. Soit $\{h_n\}_{n\geq 1}$ une suite de fonctions *continues* d'une partie B de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $\sum_{n\geq 1} \sup_{t\in B} |h_n(t)| < +\infty$ alors la fonction h définie sur B par $h(x) = \sum_{n\geq 1} h_n(x)$ est continue sur B.

   On prend pour $(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$, ν étant la mesure de décompte, et on pose $f(n, t) = h_n(t)$ et $g(n) = \sup_{t\in B} |f(n, t)|$. Le théorème précédent s'applique alors immédiatement.

2. (Continuité d'une intégrale par rapport à la borne supérieure): Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}, \lambda)$ (où λ est la mesure de lebesgue), et soit $a \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, d\lambda(t)$ est continue.

   Rappelons que $\displaystyle\int_a^x f(t)\, d\lambda(t) = \int \mathbb{1}_{[a,x]} f\, d\lambda$ pour $x \geq a$ et que $\displaystyle\int_a^x f(t)\, d\lambda(t) = -\int \mathbb{1}_{[x,a]} f\, d\lambda$ pour $x \leq a$.

   Posons pour $t, x \in \mathbb{R}$

$$F(t,x) = \begin{cases} f(t)\mathbb{1}_{[a,x]}(t) & \text{si} \quad x \geq a \\ -f(t)\mathbb{1}_{[x,a]}(t) & \text{si} \quad x < a \end{cases}$$

   - ◇ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto F(t,x)$ est mesurable.
   - ◇ Pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto F(t,x)$ est continue (seule discontinuité est en $x = t$).
   - ◇ Pour tout $x, t \in \mathbb{R}$, on a $|F(t,x)| \leq |f(t)|$.

   Le théorème de continuité s'applique et montre que $x \mapsto \displaystyle\int F(t,x)\, d\lambda(t)$ est continue.

3. (Régularisation): Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue bornée, et soit $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\lambda)$. Alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int f(x-t)g(t)\, d\lambda(t)$ est continue.(cette fonction est notée généralement $f * g$ et appelée la convolution de f et g).(Exercice).

Théorème.2 : *(de dérivation sous le signe somme). Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : X \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction vérifiant les conditions suivantes:*

1°. *Pour tout $\beta \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,\beta)$ est intégrable.*

2°. *Pour presque tout $x \in X$ la fonction $\beta \mapsto f(x,\beta)$ est dérivable sur tout I (pour x n'appartenant pas à l'ensemble exceptionnel $\mathcal{N}$ on notera $f'_\beta(x,\beta)$ la valeur de la dérivée de cette fonction au point β).*

3°. *Il existe une fonction intégrable g telle que pour tout $\beta \in I$ et pour presque tout $x \in X$, $\left| f'_\beta(x,\beta) \right| \leq g(x)$.*

Alors, pour tout $\beta \in I$, la fonction $x \mapsto f'_\beta(x,\beta)$ est intégrable ; la fonction $\beta \mapsto F(\beta) = \int f(x,\beta)\, d\mu(x)$ est dérivable sur I, et on a

$$F'(\beta) = \int f'_\beta(x,\beta)\, d\mu(x).$$

PREUVE : Notons que la fonction $x \mapsto f'_\beta(x,\beta)$ n'est pas définie sur l'ensemble exceptionnel $\mathcal{N}$; dire qu'elle est intégrable, c'est dire qu'on peut la prolonger en une fonction intégrable ; tous ces prolongements ont même intégrale, notée $\int f'_\beta(x,\beta)\, d\mu(x)$.

Soit alors β_0 un point de I ; soit $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels non nuls (assez petits pour que $\beta_0 + h_n$ soit dans I) tendant vers 0. Posons

$$\phi_n(x) = \frac{1}{h_n}\big[f(x,\beta_0+h_n) - f(x,\beta_0)\big].$$

Pour tout $x \notin \mathcal{N}$ on a $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = f'_\beta(x,\beta_0)$ (par définition de la dérivée). D'autre part, pour un tel x on a $|\phi_n(x)| \leq g(x)$, d'après la fromule des accroissements finis. Le théorème de convergence dominée montre alors que la fonction presque partout définie $x \mapsto f'_\beta(x,\beta_0)$ est intégrable et qu'on a

$$\int f'_\beta(x,\beta_0)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n(x)\, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(\beta_0+h_n) - F(\beta_0)}{h_n}.$$

Le fait que la suite $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ soit arbitraire montre que F est dérivable au point β_0 et que la dérivée $F'(\beta_0)$ a bien la valeur annoncée.

VI. Théorèmes de densité dans $\mathcal{L}^1$

THÉORÈME.1 : *Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étagée $h_\varepsilon \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$ telle que*

$$\int |f - h_\varepsilon|\, d\mu < \varepsilon.$$

PREUVE : Supposons d'abord que f est une fonction positive de $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$. On sait qu'il existe une suite croissante de fonctions étagées $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ positives convergeant simplement vers f. Evidemment ces fonctions ϕ_n sont des éléments de $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$, et d'après le théorème de convergence croissante, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int |f - \phi_n|\, d\mu = \int f\, d\mu - \lim_{n\to\infty} \int \phi_n\, d\mu = 0$$

donc il existe un n_0 tel que pour tout $n > n_0$ l'on ait $\int |f - \phi_n|\, d\mu < \varepsilon$, et on peut prendre pour h_ε l'une de ces ϕ_n.

Tout élément de $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$ étant combinaison linéaire d'au plus 4 fonctions positives de $\mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$, le théorème est établi. □

Rappelons qu'une fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *en escalier* s'il existe $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ dans $\mathbb{R}$, et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ on a

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{]t_{k+1}, t_k[}(x).$$

THÉORÈME.2 : *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}, \lambda)$ (i.e. f est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue λ), et soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier h_ε telle que*

$$\int |f - h_\varepsilon| \, d\lambda < \varepsilon.$$

PREUVE : Soit A une partie borélienne de $\mathbb{R}$ de mesure finie, et soit $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O contenant A telle que $\lambda(O) < \lambda(A) + \varepsilon/2$. D'où

$$\int |\mathbb{1}_O - \mathbb{1}_A| \, d\lambda = \lambda(O \setminus A) < \varepsilon/2 \tag{1}$$

D'autre part, O est un ouvert de $\mathbb{R}$ donc il existe une suite d'intervalles ouverts deux à deux disjoints $\{I_n\}_{n \geq 0}$ telle que $O = \bigcup I_n$, par conséquent on a $\lambda(O) = \sum\limits_{n \geq 0} \lambda(I_n)$ ce qui montre qu'il existe p tel que

$$\int \left| \mathbb{1}_O - \sum_{n=0}^{p} \mathbb{1}_{I_n} \right| d\lambda = \lambda(O \setminus \bigcup_{n=0}^{p} I_n) = \sum_{n=p+1}^{\infty} \lambda(I_n) < \varepsilon/2 \tag{2}$$

De (1) et (2) on trouve qu'il existe une fonction en escalier $h_{A,\varepsilon} = \sum\limits_{n=0}^{p} \mathbb{1}_{I_n}$ telle que

$$\int |\mathbb{1}_A - h_{A,\varepsilon}| \, d\lambda < \varepsilon.$$

ce qui démontre le théorème lorsque f est la fonction indicatrice d'un ensemble borélien de mesure finie.

Soit donc $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}, \lambda)$ et $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 1. il existe une fonction étagée intégrable $h_1 = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \mathbb{1}_{A_k}$ telle que

$$\int |f - h_1| \, d\lambda < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3}$$

pour chaque $k \in \{1, \ldots, m\}$ il existe, d'après ce que nous avons démontré, une fonction en escalier g_k telle que

$$\int |\mathbb{1}_{A_k} - g_k| \, d\lambda < \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{m} |a_j|} \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

et alors si l'on pose $h = \sum_{k=1}^{m} a_k g_k$, h est en escalier et on a

$$\int |h - h_1| \, d\lambda < \sum_{k=1}^{m} \frac{|a_k|}{1 + \sum_{j=1}^{m} |a_j|} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

et en combinant (5) et (3) on obtient

$$\int |f - h| \, d\lambda < \varepsilon.$$

d'où le résultat. □

Théorème.3 *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}, \lambda)$, et soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction h_ε continue sur $\mathbb{R}$ à support compact (i.e. $h_\varepsilon(x) = 0$ en dehors d'un intervalle bornée) telle que*

$$\int |f - h_\varepsilon| \, d\lambda < \varepsilon.$$

Preuve : Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert, et soit $\varepsilon > 0$. On définit la fonction h_ε par

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin]a, b[\\ 1 & \text{si} \quad x \in]a + \varepsilon, b - \varepsilon[\\ (x - a)/\varepsilon & \text{si} \quad x \in [a, a + \varepsilon[\\ (b - x)/\varepsilon & \text{si} \quad x \in]b - \varepsilon, b] \end{cases}$$

Il est clair que h_ε est continue à support compact, et

$$\int |\mathbb{1}_I - h_\varepsilon| \, d\lambda < \varepsilon.$$

Pour obtenir le cas général, il suffit d'utiliser ce qui précède combiné avec le théorème.2. Nous laissons les détails au lecteur. □

VII. Primitives, et Sommes de Riemann

Dans la suite, on considère seulement l'espace mesuré $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}}, \lambda)$; $B_{\mathbb{R}}$ étant la tribu borélienne, λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

a et b sont deux réels fixés $(a < b)$ et $\mathbb{K}$ désigne comme toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$. Considérons une *subdivision* $\sigma = \{a_i\}_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$.(*i.e.* $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$) et notons $h(\sigma)$ le *pas* de σ c'est-à-dire le nombre $\sup\{a_{i+1} - a_i \mid i = 0, 1, \ldots, n-1\}$. Considérons aussi une suite $\xi = \{\xi_i\}_{0 \leq i \leq n-1}$ subordonnée à σ, c'est-à-dire telle que $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$ pour $0 \leq i \leq n-1$.

Le nombre $S(f, \sigma, \xi) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i)$ s'appelle *somme de Riemann* associée à f, σ, ξ. Soit $S \in \mathbb{K}$. Nous dirons que les sommes de Riemann de f convergent vers S, lorsque le pas de σ tend vers 0, si et seulement si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision σ telle que $h(\sigma) \leq \eta$ et toute suite ξ subordonnée à σ, on ait $|S(f, \sigma, \xi) - S| \leq \varepsilon$.

THÉORÈME.1 : *Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction continue, les sommes de Riemann de f convergent vers $\int\limits_a^b f \, d\lambda$.*

PREUVE : Soit $\varepsilon > 0$, d'après la continuité uniforme de f sur l'intervalle compact $[a, b]$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall\, x, y \in [a, b], \qquad |x - y| \leq \eta \iff |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a} \qquad (1).$$

Considérons $\sigma = \{a_i\}_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision arbitraire de $[a, b]$ telle que $h(\sigma) \leq \eta$, et soit $\xi = \{\xi_i\}_{0 \leq i \leq n-1}$ une suite subordonnée à σ. Alors

$$\begin{aligned}
\left| S(f, \sigma, \xi) - \int_a^b f \, d\lambda \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(t) - f(\xi_i)) \, d\lambda(t) \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(t) - f(\xi_i)) \, d\lambda(t) \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |(f(t) - f(\xi_i))| \, d\lambda(t) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{\varepsilon}{b - a} \, d\lambda(t) = \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a} \, d\lambda(t) = \varepsilon
\end{aligned}$$

la dernière inégalité résulte de (1). Ce qui démontre le résultat. □

Définition.2 : Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. On appelle *primitive* de f toute fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{K}$, qui est dérivable et telle que $F' = f$.

Même des fonctions très simples comme $\mathbb{1}_{[0,1]}$ peuvent ne pas admettre de primitives. Par contre, dès qu'une fonction admet une primitive, il est facile de les trouver toutes comme le montre la proposition suivante.

Proposition.3 : *Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. Si f admet une primitive F_0, l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions $F_C : I \longrightarrow \mathbb{K}, x \mapsto F_0(x) + C$, où $C \in \mathbb{K}$ est une constante arbitraire.*

En effet, un corollaire simple du théorème des accroissements finis assure qu'une fonction dérivable de dérivée nulle sur un *intervalle* est constante sur cet intervalle.

Définition.4 : Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est localement intégrable (ou localement Lebesgue-intégrable) si et seulement si pour tout $a, b \in I$, tels que $a < b$ la fonction $f\mathbb{1}_{[a,b]}$ est intégrable.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction localement intégrable, $a \in I$. Définissons la fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{K}$ (que l'on note habituellement $\int_a^x f(t)\, d\lambda(t)$) par

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int \mathbb{1}_{[a,x]}(t) f(t)\, d\lambda(t) & \text{si} \quad x \geq a \\ \displaystyle -\int \mathbb{1}_{[x,a]}(t) f(t)\, d\lambda(t) & \text{si} \quad x \leq a \end{cases}$$

En appliquant le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre on voit facilement que F est continue. On a , en outre, le théorème suivant qui fait le lien avec les primitives.

Théorème.5 : *Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. Alors la fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\, d\lambda(t)$ est dérivable sur I et $F' = f$ donc c'est une primitive de f.*

Preuve : Soient $x_0 \in I$, et $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$|t - x_0| < \eta \Longrightarrow \big(t \in I, \quad \text{et} \quad |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon\big). \tag{2}$$

Prenons $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ on a en utilisant (2)

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(x_0) - (x - x_0)f(x_0)| &= \left| \int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\, d\lambda(t) \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\, d\lambda(t) \right| \\
&\leq |x - x_0|\, \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui démontre le résultat. □

COROLLAIRE.6 : *Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue, et F une primitive quelconque de f. Alors*

$$\forall\, x \in I, \qquad \int_a^x f(t)\, d\lambda(t) = F(x) - F(a).$$

COROLLAIRE.7 : *Soient $I =]\alpha, \beta[$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue et intégrable sur I, et F une primitive quelconque de f. Alors*

$$\lim_{\substack{x \to \alpha \\ y \to \beta}} F(y) - F(x) = \int_I f(t)\, d\lambda(t).$$

C'est une application simple du corollaire précédent et du théorème de convergence dominée.

On a aussi la réciproque partielle, mais importante, suivante:

PROPOSITION.8 : *Soit $I = [\alpha, \beta[$ un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Considérons une fonction continue $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$, et F une primitive quelconque de f. Supposons que $\lim\limits_{x \to \beta} F(x) - F(\alpha)$ existe dans $\mathbb{R}$, alors f est intégrable sur I et*

$$\lim_{x \to \beta} (F(x) - F(\alpha)) = \int_I f(t)\, d\lambda(t).$$

C'est une conséquence immédiate du théorème de la convergence croissante. Il est à noter que, le fait que f soit à valeurs positives est essentiel. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ existe.

VIII. Rappel des méthodes de calcul de primitives

Nous supposons le lecteur familier avec les techniques de changement de variable et d'intégration par parties.

1°. Primitive d'une fonction rationnelle.

Soit $R(X) \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle. La fonction $t \mapsto R(t)$ est continue sur le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des pôles de $R(X)$. Les primitives de $t \mapsto f(t)$ existent sur tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ne contenant aucun pôle.

Pour obtenir les primitives de $t \mapsto R(t)$, on décompose $R(X)$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$, ce qui ramène le problème au calcul des primitives des fonctions suivantes:

– une fonction polynômiale.

– une fonction de la forme $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, qui admet pour primitive :

$$t \mapsto \frac{-1}{(k-1)(t-a)^{k-1}}, \text{ si } k > 1, \qquad t \mapsto \operatorname{Log}|t-a| \text{ si } k = 1.$$

– une fonction de la forme $t \mapsto \dfrac{at+b}{((t-p)^2+q^2)^k}$ $k \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{R}_+^*$. On écrit $at = a(t-p) + ap$.

Les primitives de $t \mapsto \dfrac{a(t-p)}{((t-p)^2+q^2)^k}$ se calculent facilement grâce au changement de variable $t \mapsto u = (t-p)^2 + q^2$.

Le calcul des primitives de $t \mapsto \dfrac{1}{((t-p)^2+q^2)^k}$ est ramené, par un changement de variable affine à celui de $F_k(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^k}$ $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On dispose alors de deux méthodes ; la première consiste à effectuer le changement de variable $x \mapsto \varphi = \operatorname{Arc\,tg} x$, la seconde consiste à utiliser la formule de récurrence

$$2kF_{k+1}(x) = \frac{x}{(x^2+1)^k} + (2k-1)F_k(x).$$

2°. Primitives d'une fonction rationnelle de sin et de cos.

Soit $R(X,Y)$ une fraction rationnelle. On se propose de calculer les primitives de la fonction de la variable réelle: $t \mapsto f(t) = R(\sin t, \cos t)$.

- Si $R(X,Y)$ est un polynôme, on "linéarise".
- Si $R(X,Y)$ n'est pas un polynôme. La méthode générale consiste à effectuer le changement de variable $t = 2\text{Arc tg}\, u + 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.
- Il y a aussi les changements de variables simplificateurs:
  i. Si f est impaire, on peut effectuer le changement de variable $t \mapsto u = \cos t$.
  ii. Si $f(\pi - t) = -f(t)$ pour t appartenant à l'ensemble de définition de f, alors on peut effectuer le changement de variable $t \mapsto u = \sin t$.
  iii. Si $f(\pi + t) = f(t)$ pour t appartenant à l'ensemble de définition de f, alors on peut effectuer le changement de variable $t \mapsto u = \text{tg}\, t$.

3°. Quelques intégrales abéliennes.

- Soit $R(X,Y)$ une fraction rationnelle. La primitive de $x \mapsto R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ se calcule en effectuant le changement de variable $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.
- Soit $R(X,Y)$ une fraction rationnelle. La primitive de $x \mapsto R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ se calcule en effectuant un changement de variable de la forme:
  i. Si $a > 0$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + \varepsilon x\sqrt{a}$ où $\varepsilon \in \{+1, -1\}$.
  ii. Si $c > 0$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \varepsilon\sqrt{c}$ où $\varepsilon \in \{+1, -1\}$.
  iii. Si α est une racine de $ax^2+bx+c = 0$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$.
- Soit $f(x) = x^m(a+bx^n)^p$ où $m, n, p \in \mathbb{Q}$
  i. Si $p \in \mathbb{N}^*$ on développe $(a+bx^n)^p$.
  ii. Si $-p \in \mathbb{N}^*$ on pose $x = t^k$ où k est le dénominateur commun de m et n.
  iii. Si $(m+1)/n \in \mathbb{Z}$ on pose $a + bx^n = t^k$ où k est le dénominateur de p.
  iv. Si $p + (m+1)/n \in \mathbb{Z}$ on pose $a + bx^n = x^n t^k$ où k est le dénominateur de p.

IX. Exercices

Exercice .1 Soient E un ensemble, $\{A_n\}_{n\geq 0}$ une suite de parties de E. On pose

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n = \bigcap_{n\geq 0}\big(\bigcup_{k\geq n} A_k\big), \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n = \bigcup_{n\geq 0}\big(\bigcap_{k\geq n} A_k\big).$$

1°. Montrer que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n = \{x\in E \mid x \text{ appartient à une infinité de } A_k\text{'s}\}$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n = \{x\in E \mid x \text{ appartient à tous les } A_k\text{'s à partir d'un certain rang}\}$$

2°. Soit $E=\mathbb{R}$,on pose pour $n\geq 1$ $A_{2n}=[-1,2+1/n[$, et $A_{2n+1}=]-2-1/n,1]$.

Déterminer $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n$.

3°. Montrer que

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n, \quad E\setminus \underline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(E\setminus A_n)$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(A_n\cup B_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n \cup \overline{\lim_{n\to\infty}}\, B_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n \cap \overline{\lim_{n\to\infty}}\, B_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(A_n\cap B_n) \subset \overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n \cap \overline{\lim_{n\to\infty}}\, B_n$$

Exercice .2 On dit qu'un ensemble $\mathcal{M}$ de parties d'un ensemble E est une classe monotone quand pour toute suite croissante (resp. décroissante) $\{A_n\}_{n\geq 0}$ de $\mathcal{M}$, $\cup A_n$ (resp. $\cap A_n$) appartient à $\mathcal{M}$. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de parties de E (*i.e.* $\emptyset\in\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est stable par réunion finie et par passage au complémentaire).

1°. Montrer qu'il existe une plus petite classe monotone $\mathcal{M}_0$ contenant $\mathcal{A}$.(qu'on appelle engendrée par $\mathcal{A}$).

On veut démontrer que $\mathcal{M}_0$ est la tribu $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ engendrée par $\mathcal{A}$.

2°. Notons $\mathcal{M}_1$ (resp. $\mathcal{M}_2$) l'ensemble des $M\in\mathcal{M}_0$ tels que $M\cup A\in\mathcal{M}_0$, pour tout $A\in\mathcal{A}$ (resp. pour tout $A\in\mathcal{M}_0$). Montrer que $\mathcal{M}_1=\mathcal{M}_0$ puis que $\mathcal{M}_2=\mathcal{M}_0$.

3°. En utilisant une méthode similaire montrer que $\mathcal{M}_0$ est stable par passage au complémentaire. Conclure.

Application: Si μ et ν sont deux mesures sur $B_{\mathbb{R}}$ coïncidant sur les intervalles, alors elles sont égales.

Exercice .3 Soit $\mathcal{T}_n$ la tribu sur $[0,1[$ engendrée par les intervalles $I_k = I_k^{(n)} = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[$ où $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$.

1°. Décrire $\mathcal{T}_n$. Quel est le nombre de ses éléments.

2°. Montrer que les fonctions mesurables de $([0,1[, \mathcal{T}_n)$ dans $\mathbb{R}$ sont toutes de la forme

$$\sum_{0 \leq k < 2^n} \alpha_k \mathbb{I}_{I_k}$$

.

3°. On pose $f_\ell(x) = E(2^\ell x)$ pour $\ell = 0, 1, \ldots, n$. Montrer que f_ℓ est $\mathcal{T}_n$-mesurable. Exprimer f_ℓ comme dans 2°.

4°. On pose $\epsilon_\ell(x) = f_\ell(x) - 2f_{\ell-1}(x)$, pour $\ell = 1, \ldots, n$. Montrer que ϵ_ℓ est la fonction indicatrice d'un ensemble A_ℓ qu'on déterminera.

Exercice .4 Soit $\{f_n\}_{n \geq 0}$ une suite de fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose pour $x \in \mathbb{R}$

$$h(x) = \overline{\lim_{n \to \infty}} f_n(x), \qquad g(x) = \underline{\lim_{n \to \infty}} f_n(x).$$

1°. Montrer que $h : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sont boréliennes.

2°. Montrer que $\{x \in \mathbb{R} \mid \{f_n(x)\}_{n \geq 0} \text{ converge}\}$ est un borélien.

Exercice .5

I

On se propose dans cette partie de démontrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et toute partie infinie de $\mathbb{Q}$.

1°. Si $n \in \mathbb{N}$, on pose $x(n) = E(\frac{\sqrt{1+8n}+1}{2})$ où $E(y)$ désigne la partie entière de y. On définit aussi

$$\Theta_1(n) = \frac{x(n)[x(n)+1]}{2} - 1 - n, \quad \text{et} \quad \Theta_2(n) = n + 1 - \frac{x(n)[x(n)-1]}{2}.$$

Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \Theta_1(n) \in \mathbb{N}, \quad \text{et} \quad \Theta_2(n) \in \mathbb{N}^*.$$

2°. Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on pose $\Psi(\alpha,\beta) = \dfrac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2} + \beta - 1$. Montrer que $\forall\, (\alpha,\beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \qquad \Psi(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}$.

3°. On considère alors les deux applications:

$$\Phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* : n \mapsto \Phi(n) = (\Theta_1(n), \Theta_2(n))$$

$$\Psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N} : (\alpha,\beta) \mapsto \Psi(\alpha,\beta)$$

Montrer que $\Psi \circ \Phi = I_{\mathbb{N}}$, et $\Phi \circ \Psi = I_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$.

4°. On considère l'application $\Lambda : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \dfrac{\Theta_1(p)}{\Theta_2(p)} & \text{si} \quad n = 2p \\ -\dfrac{\Theta_1(p)}{\Theta_2(p)} & \text{si} \quad n = 2p+1 \end{cases}$$

Montrer que Λ est surjective.

5°. Déduire de ce qui précède, qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$.

6°. Déduire qu'il existe aussi une bijection entre $\mathbb{N}$ et toute partie infinie A de $\mathbb{Q}$.

II

On se propose de démontrer dans cette partie que tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$ est réunion d'une suite d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On définit sur O la relation binaire :

$$x\mathcal{R}y \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists I \text{ intervalle ouvert } : x, y \in I \subset O).$$

1°. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2°. Montrer que les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ sont des intervalles ouverts.

3°. Montrer qu'il existe une partie $A \subset \mathbb{Q}$ telle que

$$\forall\, (q,p) \in A \times A, \quad p \neq q \Longrightarrow \widetilde{p} \cap \widetilde{q} = \emptyset$$

$$O = \bigcup_{q \in A} \widetilde{q}$$

Où $\widetilde{q}$ désigne la classe de q modulo $\mathcal{R}$.

4°. En utilisant **I**, montrer qu'il existe une suite d'intervalles ouverts $\{I_n\}_n$ deux à deux disjoints avec $O = \bigcup_{n\geq 0} I_n$.

Exercice .6 Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ dense dans $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue inférieure à ϵ.

Exercice .7 Soit $\{E_n\}_{n\geq 0}$ une suite d'ensembles mesurables de $(X, \mathcal{T}, \mu)$ tels que $\sum \mu(E_n) < +\infty$. Montrer que

$$\mu\big(\{x \in X \mid x \text{ appartient à une infinité de } E_n\text{'s}\}\big) = 0.$$

Exercice .8 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. Soit $\{A_n\}_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

1°. Etablir que

$$\mu(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mu(A_n), \qquad \mu(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n) \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \mu(A_n).$$

2°. Supposons que pour tout $x \in X$ on a: $\lim_{n\to\infty} 1\!\!1_{A_n}(x) = 1\!\!1_A(x)$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$. Est-ce que ce résultat subsiste si $\mu(X) = +\infty$?

3°. Montrer que si $\sum \mu(A_n) < +\infty$, il existe $N \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(N) = 0$ et tel que pour tout $x \notin N$, $\lim_{n\to\infty} 1\!\!1_{A_n}(x) = 0$.

4°. Montrer par un contre-exemple que si l'on sait seulement que $\mu(A_n)$ tend vers 0, alors $1\!\!1_{A_n}$ peut bien ne tendre vers 0 en aucun point.

Exercice .9 Soit n un entier strictement positif. On note $\mathbb{N}_n = [1, n] \cap \mathbb{N}$, et $P_k^{(n)}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}_n$ qui sont de cardinal k.

1°. Montrer par récurrence sur n que pour tout $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'on a

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + xa_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{B\in P_k^{(n)}} \prod_{i\in B} a_i\right) x^k.$$

2°. Soient E un ensemble fini, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On considère aussi $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $f : E \longrightarrow \{0,1\}$. À une partie $A \subset E$ on associe l'élément $\mathbb{1}_A$ de $\mathcal{F}$ défini par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$$

a. Montrer que l'application $\Phi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{F} : A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection.

b. Montrer que

- $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A.\mathbb{1}_B$.
- $\mathbb{1}_{E\setminus A} = 1 - \mathbb{1}_A$.
- $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A.\mathbb{1}_B$.

c. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties de E, On note $A = \bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Montrer $\mathbb{1}_A = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - \mathbb{1}_{A_k})$. En déduire que

$$\mathbb{1}_A = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum_{B\in P_k^{(n)}} \prod_{i\in B} \mathbb{1}_{A_i}\right).$$

Dans la suite μ désigne une mesure positive sur $\mathcal{P}(E)$.

3°. Montrer que, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des parties de E, alors

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\sum_{B\in P_k^{(n)}} \mu(\bigcap_{i\in B} A_i)\right).$$

4°. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties de E. On note G_s, $(0 \le s \le n)$, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à exactement s ensembles parmis les $\{A_k\}_k$. Montrer que

$$\mu(G_s) = \sum_{k=s}^{n}(-1)^{k-s}C_k^s\left(\sum_{B\in P_k^{(n)}} \mu(\bigcap_{i\in B} A_i)\right).$$

(On pourrait commencer par montrer que si Λ est une partie à s éléments de $\mathbb{N}_n$ et si G_Λ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A_k si $k \in \Lambda$ et à $E \setminus A_k$ si $k \notin \Lambda$, alors

$$\mu(G_\Lambda) = \sum_{k=0}^{n-s}(-1)^{k}\left(\sum_{B\in P_k^{(\Lambda')}} \mu(\bigcap_{i\in B\cup\Lambda} A_i)\right)$$

où $P_k^{(\Lambda')}$ est l'ensemble des parties à k éléments de $\mathbb{N}_n \setminus \Lambda$.)

5°. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des parties de E. On note H_s, $(0 \leq s \leq n)$, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à au moins s ensembles parmis les $\{A_k\}_k$. Montrer que

$$\mu(H_s) = \sum_{k=s}^{n} (-1)^{k-s} C_{k-1}^{s-1} \left(\sum_{B \in P_k^{(n)}} \mu(\bigcap_{i \in B} A_i) \right).$$

6°. Soient $B \subset \mathbb{N}_n$ une partie de cardinal k, S_n le groupe symétrique. Montrer que Card $(\{\sigma \in S_n \ : \ \forall\, i \in B, \quad \sigma(i) = i\}) = (n-k)!$.

7°. Pour $j \in \mathbb{N}_n$ on note A_j l'ensemble des permutations $\sigma \in S_n$ qui laissent fixe l'élément j: $A_j = \{\sigma \in S_n \ : \ \sigma(j) = j\}$. On dit qu'une permutation σ contient une rencontre en j si $\sigma(j) = j$. Calculer le nombre r_n (respectivement, $g_n(s), h_n(s)$) des permutations qui ne contiennent pas de rencontre, (respectivement, contiennent exactement s rencontres, contiennent au moins s rencontres).

Exercice .10 On dit qu'une mesure μ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est invariante par translation si $\mu(t + A) = \mu(A)$ pour toute partie A de $\mathbb{R}$ et tout nombre réel t. (rappelons que $t+A = \{t+x \mid x \in A\}$). Montrer que si μ est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ invariante par translation et bornée sur les intervalles, alors elle est nulle. (*indication :* Soit E un ensemble ayant un élément, et un seul, dans chaque classe d'équivalence modulo la relation $x \Re y \iff x-y \in \mathbb{Q}$ sur les éléments de $\mathbb{R}$. Observer que les $\{q+E\}_{q \in \mathbb{Q}}$ sont deux à deux disjoints. En déduire qu'ils sont de mesure nulle. Puis remarquer que $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q + E))$.

Exercice .11 Soit $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$. On munit X de la tribu $\mathcal{T}(g) = g^{-1}(B_{\mathbb{R}})$. Montrer que toute fonction $\mathcal{T}(g)$-mesurable de X dans $\mathbb{R}$ est de la forme $h \circ g$ où h est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice .12 Montrer qu'une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne.

Exercice .13 Soit A la partie de $\mathbb{R}$ formée par les x de $\mathbb{R}$ pour lesquels il existe une infinité de $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^3}$. Montrer que la mesure de Lebesgue de A est 0.

Exercice .14 Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable. On suppose que $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = d_0$ existe, et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = d_\infty$ existe. Montrer que pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ si $t \mapsto \dfrac{f(at)-f(bt)}{t}$ est integrable sur $\mathbb{R}_+$, alors

$$\int_0^\infty \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt = (d_0 - d_\infty)\mathrm{Log}\,\frac{b}{a}.$$

Exercice .15 Soient $a > b > 0$, pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\cos xt\,dt$$

Montrer que $I(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer $I(x)$. (On pourra dériver sous le signe somme).

Exercice .16 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b (f(t))^n\,dt\right)^{1/n} = \sup_{t\in[a,b]} f(t).$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b (f(t))^{1/n}\,dt\right]^n = \exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(t)\,dt\right).$$

Exercice .17 Calculer les limites des suites suivantes:

1°. $\displaystyle\sum_{k=1}^n \log\left(1+\frac{k}{n}\right)\log\left(\frac{k+n}{n+k-1}\right)$.

2°. $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{k}{n\sqrt{n}\,(\sqrt{n}+\sqrt{n+k})}$.

3°. $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2+(-1)^k k^2}}$.

Exercice .18 Soit $f : [0, a[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction nulle en 0, dérivable à droite en 0, et soit $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} f(\frac{1}{n} g(\frac{p}{n})) = f'_d(0) \int_0^1 g(t)\, dt$$

Application: Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{p=1}^{n} (1 + \frac{1}{n} g(\frac{p}{n})) = \exp\Big(\int_0^1 g(t)\, dt \Big).$$

et calculer

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \big(\mathrm{ch}\,(\frac{1}{\sqrt{n+p}}) - 1\big).$$

Exercice .19 Utiliser les sommes de Riemann pour évaluer

$$I(z) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - e^{it}}, \qquad |z| \neq 1.$$

Calculer aussi, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$I_p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(z - e^{it})^p}, \qquad |z| \neq 1.$$

Exercice .20 Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable telle que $f(a + b - x) = f(x)$. Montrer que

$$\int_a^b x f(x)\, dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)\, dx$$

Application : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$, et $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin x}\, dx$.

Exercice .21 Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(t)\, dt \leq |f'(\xi)|\,.$$

Exercice .22 Calculer

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}, \qquad J = \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1+x^4}.$$

Exercice .23 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, et soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe deux fonctions croissantes et continues h, g telles que

$$\forall\, x \in [a,b],\ h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b (g(x) - h(x))\, dx < \varepsilon.$$

Exercice .24 On se propose dans cet exercice de calculer $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$. Considérons les intégrales suivantes:

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx, \qquad I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\, dx, \qquad J_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

1°. Calculer I_n et J_n en fonction de W_n.

2°. Montrer que $\forall\ x \in [0,1], \quad 1 - x^2 \leq e^{-x^2}$ et que $\forall\ x \in [0,+\infty], \quad e^{-x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$. En déduire que

$$I_n \leq \frac{I}{\sqrt{n}} \leq J_n.$$

3°. Trouver une relation entre W_{n+2} et W_n, et montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $nW_nW_{n-1} = \pi/2$.

4°. En déduire la valeur de I.

Exercice .25 Soit $a > 0$, on pose $I_n(a) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-ax} \sin^n x\, dx$. Calculer $I_n(a)$.

Exercice .26 Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_0^\pi \log\left(1 - 2x\cos t + x^2\right) dt$. Calculer $I(x)$.

Exercice .27 Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $I(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos xt}{t^2} e^{-t}\, dt$. Montrer que $I(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer $I(x)$ en dérivant sous le signe somme.

Exercice .28 Pour $x \in \mathbb{R}^+$ on pose

$$J(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\sin^2 t + x^2 \cos^2 t}}, \quad K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t \, dt}{\sqrt{\sin^2 t + x^2 \cos^2 t}}.$$

1°. Montrer que $J(x) - K(x)$ converge vers $\operatorname{Log} 2$ quand x tend vers 0 avec des valeurs positives.

2°. Calculer $K(x)$ pour $x \in]0, 1[$.

3°. En déduire $\lim_{x \to 0} (J(x) + \operatorname{Log} x)$.

Exercice .29 Pour $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \setminus \{(0,0)\}$ on pose

$$A(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{Log}(x \sin^2 \theta + y \cos^2 \theta) \, d\theta$$

1°. Montrer que $A(x, y) = A(y, x)$, et que $A\Big((\frac{x+y}{2})^2, xy \Big) = 2A(x, y)$.

2°. On considère les deux suites $\{u_n\}_{n \geq 0}$ et $\{v_n\}_{n \geq 0}$ définies par

$$u_0 = x, \ v_0 = y, \quad , u_{n+1} = (\frac{u_n + v_n}{2})^2, \quad v_{n+1} = v_n u_n.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$ l'on a

$$\frac{1}{2^n} \operatorname{Log} v_n \leq A(u_0, v_0) \leq \frac{1}{2^n} \operatorname{Log} u_n.$$

3°. En considérant les deux suites $\{S_n\}_{n \geq 0}$ et $\{T_n\}_{n \geq 0}$ définies par

$$S_n = \sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}, \qquad T_n = \sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}$$

calculer $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{Log} v_n$, et $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{Log} u_n$. En déduire la valeur de $A(x, y)$.

Exercice .30 Soit $F(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x \, dt$.

1°. Montrer que F est bien définie et continue sur $] - 1, +\infty[$.

2°. Calculer $\lim_{x \to \infty} F(x)$.

3°. En considérant $J(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x \cos t \, dt$, démontrer que

$$F(x) = \frac{1}{x+1} + \log 2 + \varepsilon(x+1)$$

où $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

*4°. Déterminer un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice .31 Soit $f : [a,b] \longrightarrow [f(a), f(b)]$ une fonction continue strictement croissante.

1°. Montrer que pour tout $\alpha, \beta \in [f(a), f(b)]$ on a

$$\int_\alpha^\beta f^{-1}(t)\, dt = \beta f^{-1}(\beta) - \alpha f^{-1}(\alpha) - \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(t)\, dt.$$

2°. Soit $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une bijection continue. Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$

$$ab \leq \int_0^b g(s)\, ds + \int_0^a g^{-1}(s)\, ds.$$

Exercice .32 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et soit $\tau \in]0,1[$. On pose

$$I_n(f,\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k+\tau}{n}) - n\int_0^1 f(t)\, dt.$$

Montrer que $I_n(f,\tau)$ admet une limite α lorsque l'on fait tendre n vers l'infini. Montrer aussi que si f est de classe C^2, alors $n(I_n(f,\tau) - \alpha)$ admet une limite β lorsque l'on fait tendre n vers l'infini. Déterminer α et β en fonction de τ, f, et f'.

Exercice .33 Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée et T-périodique. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t)h(\nu t)\, dt = \left(\frac{1}{T}\int_0^T h(t)\, dt\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt\right).$$

(On pourrait commencer par le cas où f est la fonction indicatrice d'un intervalle.)

Exercice .34

1°. Soit $\varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, telle que $\varphi(0) = 0$. En considérant la fonction

$$g(x) = (\varphi^2(x)\mathrm{cotg}\, x)' + (\varphi'(x) - \varphi(x)\mathrm{cotg}\, x)^2$$

montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \varphi^2(x)\, dx \leq \int_0^{\pi/2} \varphi'^2(x)\, dx.$$

Montrer qu'il y a égalité si, et seulement si, φ est de la forme $x \mapsto \lambda \sin x$.

2°. Montrer que pour toute fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, on a

$$\int_a^b (f(x) - f(a))^2\, dx \leq \frac{4(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'^2(x)\, dx$$

avec égalité si, et seulement si, f est de la forme $x \mapsto \mu + \lambda \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x-a}{b-a}\right)$.

Exercice .35 On considère les deux suites:

$$v_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}, \qquad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \qquad (n \geq 0).$$

1°. En utilisant $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n = \frac{\pi}{4}$.

2°. Montrer qu'il existe une constante M telle que, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$,on a

$$\left| \int_0^1 \frac{x^t}{1+x^2}\,dx - \frac{\pi}{4} \right| \leq Mt.$$

3°. En déduire $\displaystyle\lim_{\nu\to\infty} \nu \int_0^1 \frac{x^\nu}{1+x^{2\nu}}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

Exercice .36 Soient $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) \in]0,1[$, $\lambda \in]-\pi,\pi[$, et $t \in \mathbb{R}_+^*$. On note

$$g(z,\lambda,t) = \frac{t^{z-1}}{1+te^{i\lambda}}.$$

1°. Montrer que $t \mapsto g(z,\lambda,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose alors

$$f(z,\lambda) = \int_0^{+\infty} g(z,\lambda,t)\,dt$$

2°. Prouver que la fonction $F_z :]-\pi,\pi[\longrightarrow \mathbb{C}, \lambda \mapsto f(z,\lambda)$ est dérivable. En déduire que $H(z,\lambda) = e^{i\lambda z} f(z,\lambda)$ ne dépend pas de λ, et prouver enfin que

$$f(z,\lambda) = \frac{\pi e^{-i\lambda z}}{\sin \pi z}.$$

Indication: Utiliser, après l'avoir prouvée, la relation

$$\begin{aligned}\sin \lambda z H(z,\lambda) &= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} t^{z-1}\left(\frac{1}{1+te^{-i\lambda}} - \frac{1}{1+te^{i\lambda}}\right) dt \\ &= \int_{\mathrm{cotg}\,\lambda}^{+\infty} \frac{(u\sin\lambda - \cos\lambda)^z}{1+u^2}\,du \quad (\text{si } \lambda > 0).\end{aligned}$$

3°. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^z}{1+2t\cos\lambda + t^2}\,dt = \frac{\pi}{\sin\lambda}.\frac{\sin\lambda z}{\sin \pi z}$, et que si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{t+a}\,dt = \frac{\pi a^{z-1}}{\sin \pi z}.$$

Exercice .37 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue.

1°. On pose $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

2°. Montrer que $\lim_{n\to\infty} nI_n = f(1)$.

3°. On suppose que $f \in C^m([0,1])$. Montrer que

$$\left| I_{n-1} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{n(n+1)\cdots(n+k)} f^{(k)}(1) \right| \leq \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m)} \sup_{[0,1]} \left| f^{(m)} \right|.$$

4°. Déduire un développement asymptotique à l'ordre 3 en $\frac{1}{n}$ de

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

Exercice .38 (*inégalité de Hölder*)

1°. Montrer que $\forall\, u, v \in \mathbb{R}_+^*$, et $\forall t \in]0,1[$, on a

$$u^t v^{1-t} \leq tu + (1-t)v.$$

2°. Soient $p, q \in]1, +\infty[$, avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Soient f, g deux fonctions positives et mesurables, telles que $f^p \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ et $g^q \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$. Montrer que $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ et

$$\int fg\, d\mu \leq \left(\int f^p\, d\mu \right)^{1/p} \left(\int g^q\, d\mu \right)^{1/q}.$$

3°. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue à support compact (*i.e.* $\overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ est compact). On pose pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt$.

a. Trouver $\lim_{x\to 0} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

b. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $xg' + g = f$.

c. Soit $p \in]1, +\infty[$, en effectuant une intégration par parties et en utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que

$$\int_0^{+\infty} (g(x))^p\, dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^{+\infty} (f(x))^p.$$

Exercice .39 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 \sqrt{1 + n^2 x^{2(n-1)}}\, dx$. (C'est la longueur de la courbe qui représente $x \mapsto x^n$ sur $[0, 1]$). On note aussi pour $y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$J(y) = \int_0^y \frac{dt}{1 + t + \sqrt{1 + t^2}}.$$

1°. Montrer que $I_n = 2 - \frac{2}{n-1} J(n) + \frac{2}{n-1} \int_0^1 J(nx^{n-1})\, dx$.

2°. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 J(nx^{n-1})\, dx = 0$.

3°. En déduire $\lim_{n\to\infty} n(I_n - 2) - \operatorname{Log} n$.

Exercice .40 On pose $f(t) = \frac{t \sin t}{1 - \cos t}$. Le but de cet exercice est le calcul de $J = \int_0^\pi f(t)\, dt$.

1°. Montrer que pour tout $t \in]0, \pi]$, $0 \leq f(t) \leq 2$, et que f est prolongeable par continuité en 0.

2°. Calculer $H(a) = \int_0^\pi \frac{dt}{1 - a \cos t}$ pour $0 \leq a < 1$.

3°. Calculer $K(x) = \int_0^\pi \frac{t \sin t}{(1 - x \cos t)^2}\, dt$ pour $0 \leq x < 1$.

4°. Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$ sur $]0, 1[$.

5°. On pose pour $0 \leq x < 1$:

$$\varphi(x) = \int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 - x \cos t}\, dt.$$

Calculer $\varphi(0)$, puis démontrer les inégalités

$$|\varphi(x) - J| \leq 2(1 - x) \int_0^\pi \frac{dt}{1 - x \cos t}.$$

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \frac{\pi x}{1 - x}.$$

6°. Démontrer que sur $]0, 1[$, φ est solution de l'équation différentielle: $xy' + y = K(x)$. En déduire φ puis la valeur de J.

Exercice .41

1°. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}^n t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On note $I(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}^n t}\,dt$.

2°. Calculer $I(1)$ et $I(2)$.

3°. Trouver une relation de récurrence entre $I(n)$ et $I(n-2)$. En déduire $I(n)$.

4°. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq m < n$. Montrer que $t \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}^m t}{\operatorname{ch}^n t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On note $J(n,m) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}^m t}{\operatorname{ch}^n t}\,dt$.

5°. Trouver une relation de récurrence entre $J(n,m)$ et $J(n-2, m-2)$, pour $n \geq 3$, et $m \geq 2$.

6°. Calculer $J(n,0)$, $J(n,1)$ et $J(n,2)$.

7°. En déduire $J(n,m)$, pour tout $n > m \geq 0$.

Exercice .42 On pose, pour $x \geq -1$, $G(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{Log}(1 + x\sin^2 t)\,dt$.

1°. Montrer que G est continue sur $[-1, +\infty[$ et dérivable sur $]-1, +\infty[$.

2°. Calculer $G'(x)$ pour $x \in]-1, +\infty[$.

3°. En déduire la valeur de $G(x)$, $(x \geq -1)$.

Exercice .43

I

1°. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On note $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}$.

2°. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. Donner la valeur de $\Gamma(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

3°. On pose

$$g_n(t) = \mathbb{1}_{[0,n]}(t)\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n, \quad \gamma_n(\alpha) = \int_0^n g_n(t)t^{\alpha-1}\,dt.$$

- Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad g_n(t) \leq g_{n+1}(t) \leq e^{-t}$.
- En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n(\alpha) = \Gamma(\alpha)$.

4°. En effectuant des intégrations par parties, montrer que

$$\gamma_n(\alpha) = \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)(\alpha+n)} = \frac{e^{-\alpha t(n)}}{\alpha \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{\alpha}{k})\, e^{-\frac{\alpha}{k}}}.$$

où $t(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \operatorname{Log} n$.

5°. Montrer qu'il existe une constante δ telle que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \lim_{n\to\infty} \alpha e^{\alpha\delta} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{\alpha}{k}\right) e^{-\frac{\alpha}{k}}.$$

6°. Dans cette question on suppose que $\alpha \in]0,1[$. Montrer que

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = \lim_{n\to\infty} \alpha \prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right).$$

II

1°. Montrer, pour $n \geq 0$, que

$$\frac{1}{2i}\left[\left(1+\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1-\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1}\right] = X \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{X^2}{(2n+1)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi k}{2n+1}}\right).$$

2°. En déduire que, pour tout x dans $]0,\pi[$, $\sin x = \lim_{n\to+\infty} x \prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right)$.

3°. En utilisant la première partie, montrer que

$$\forall \alpha \in]0,1[, \qquad \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

4°. Montrer en particulier que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

5°. On pose

$$a_n(\alpha) = 2^\alpha \, \frac{\alpha+2n+1}{2n+1} \, \frac{\gamma_n(\frac{\alpha}{2})\gamma_n(\frac{1+\alpha}{2})}{\gamma_{2n}(\alpha)}.$$

Montrer que $a_n(\alpha)$ ne dépend pas de α. En déduire que

$$\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) = 2^{1-\alpha}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha).$$

Exercice .44

I

1°. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{-i\pi kt}$. Montrer que

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\, dt = \int_{1/2}^{1} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\, dt = \frac{1}{2}.$$

2°. Soit g une fonction continue sur $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \int_a^b g(t) \sin mt\, dt = 0$.

3°. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, dérivable à droite en 0 et à gauche en 1. On pose

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} \int_0^1 f(t)\, e^{-2i\pi kt}\, dt.$$

Montrer que

$$S_n = \int_0^1 f(t) \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}\, dt.$$

En prolongeant par continuité les deux fonctions $\left]0, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \dfrac{f(t) - f(0)}{\sin \pi t}$ et $\left[\frac{1}{2}, 1\right[\longrightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \dfrac{f(t) - f(1)}{\sin \pi t}$, calculer la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4°. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\frac{1}{2} f(0) + f(1) + \cdots + f(p-1) + \frac{1}{2} f(p) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=-n}^{n} \int_0^p f(t)\, e^{-2i\pi kt}\, dt \right).$$

II

1°. On pose

$$\alpha(x) = \int_0^x \cos t^2\, dt, \quad \beta(x) = \int_0^x \sin t^2\, dt, \quad \gamma_p(x) = \int_0^x e^{2i\pi pt^2}\, dt.$$

Montrer que $\alpha(x)$, $\beta(x)$ et $\gamma_p(x)$ admettent des limites finies lorsque x tend vers l'infini. On note ces limites α, β et γ_p respectivement. Exprimer γ_p en fonction de α , β et p.

2°. Montrer que, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$\int_0^1 e^{2i\pi p(x^2 - kx)}\, dx = (-i)^{pk^2} \int_{(k-2)/2}^{k/2} e^{2i\pi pu^2}\, du.$$

En déduire $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n}\int_0^1 e^{2i\pi p(x^2-kx)}\,dx\right)$ en fonction de α , β et p.

3°. En applicant le résultat du **I**.4°. à la fonction $f : t \mapsto \exp(2i\pi t^2/p)$, calculer la somme de Gauss $G_p = \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2i\pi k^2}{p}}$ pour tout $p \geq 1$, et déterminer explicitement les valeurs des intégrales de Fresnel α et β.

Exercice .45 Pour α élément de $\mathbb{R}_+$, t élément de $\mathbb{R}$, on définit l'application $f_{\alpha,t}$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$f_{\alpha,t}(x) = \frac{x^\alpha e^{-tx}}{1+x^2}.$$

I

1°. Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des couples (α, t) éléments de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tels que $x \mapsto f_{\alpha,t}(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Si $(\alpha, t) \in \mathcal{C}$, on note $\phi_\alpha(t)$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{\alpha,t}(x)\,dx$, et l'on définit ainsi une application ϕ_α d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par exemple ϕ_0 est définie sur $\mathbb{R}_+$.

2° *a*. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Montrer que ϕ_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \phi'_\alpha(t) = \phi_{\alpha+1}(t)$$

b. Déduire de ce qui précède que ϕ_0 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, et que l'on a

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \phi''_0(t) + \phi_0(t) = \frac{1}{t} \tag{1}$$

3° *a*. Montrer pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, les inégalités :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}_+^*, \qquad |\phi_0(t) - \phi_0(0)| \leq \frac{1}{2}ta^2 + \text{Arc tg}\,\frac{1}{a} \tag{2}$$

$$\phi_0(t) \leq \frac{1}{t} \tag{3}$$

b. En déduire que ϕ_0 est continue sur $\mathbb{R}_+$, et que $\lim_{t\to\infty}\phi_0(t) = 0$.

4°. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des applications deux fois dérivables de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient:

$$(\mathcal{P})\begin{cases}\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \phi''_0(t) + \phi_0(t) = 1/t, \\ \lim_{t\to\infty}\phi_0(t) = 0.\end{cases}$$

a exactement un élément.

II

1°. Soient u, x des éléments de $\mathbb{R}_+^*$ tels que $u < x$, et v un réel. On pose

$$F_{u,v}(x) = \int_u^x \frac{\sin(t-v)}{t}\, dt.$$

Montrer que $F_{u,v}(x)$ admet une limite finie (notée $F(u,v)$) quand x tend vers $+\infty$, et que

$$F(u,v) = \frac{\cos(u-v)}{u} - \int_u^{+\infty} \frac{\cos(x-v)}{x^2}\, dx.$$

2°. Montrer que $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = F(t,t)$, est de classe C^∞, et que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f''(t) + f(t) = \frac{1}{t}. \tag{4}$$

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(t) = \frac{1}{t} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(t+x)^2}\, dx. \tag{5}$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0. \tag{6}$$

Que peut-on en déduire ?

3°. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $h(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$. Montrer que $h(x)$ converge vers une limite γ quand x tend vers l'infini. Montrer aussi que $f(t)$ tend vers γ quand t tend vers 0^+.

4°. Conclure que $\gamma = \pi/2$. En déduire les valeurs de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\, dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\, dx.$$

Exercice .46 Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt$$

1°. Démontrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, et que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. (On appliquera par exemple le théorème de convergence dominée).

2°. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (On appliquera le théorème de dérivation sur des intervalles de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$), et que l'on a

$$f'(x) - f(x) + \frac{C}{\sqrt{x}} = 0, \qquad C = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du$$

3°. Résoudre cette équation et en déduire la valeur de C.

Exercice .47

I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt$.

1°. Former une relation entre I_n et I_{n-2} pour $n \geq 2$.

2°. En déduire la valeur de I_{2n} et de I_{2n+1}.

3°. En remarquant que $\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$, établir la formule de Wallis:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{W}$$

4°. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$a_n = \frac{n!\, e^n}{n^n\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad u_n = \operatorname{Log}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

a. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\geq 1}$ converge.

b. En déduire que la suite $\{a_n\}_{n\geq 1}$ converge vers un réel $\ell > 0$.

c. Calculer ℓ en utilisant le rapport a_n^2/a_{2n} et (W).

d. En déduire la formule de Stirling:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1 \tag{S}$$

II

Dans cette partie on se propose de démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité suivante:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} > \frac{e^n}{2}.$$

On note $\phi : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\phi(x) = \operatorname{Log}\frac{1+x}{1-x} - 2x$$

et pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f_n(x) = x^n e^{-x}$.

1°. Montrer que $\forall\ x \in]0, 1[, \quad \phi(x) > 0$.

2°. En déduire que $\forall\ x \in]0, n], \quad f_n(n + x) > f_n(n - x)$.

3°. Montrer que $\int_0^n f_n(t)\, dt < \int_n^{2n} f_n(t)\, dt$.

4°. Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+ \qquad \int\limits_0^x f_n(t)\,dt = n!\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$$

5°. En déduire que pour n fixé $\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_0^x f_n(t)\,dt = n!$.

6°. Etablir $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} > \frac{e^n}{2}$.

III

Dans cette partie on se propose de démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

1°. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $(1-x)e^x \leq e^{-x^2/2}$.

2°. On note $g_n(x) = \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(x)\big(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\big)^n e^{x\sqrt{n}}$.

a. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad g_n(x) \leq e^{-x^2/2}$.

b. Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = e^{-x^2/2}.$$

c. Utiliser le théorème de convergence dominée pour en déduire, que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}} \big(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\big)^n e^{x\sqrt{n}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

0n admet le résultat connu $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{\pi/2}$.

3°. En déduire la limite de la suite $\{I_n\}_n$ définie par $I_n = \sqrt{n}\int\limits_0^1 (1-t)^n e^{nt}\,dt$.

4°. Montrer que

$$I_n = \frac{e^n}{n^n\sqrt{n}}\int_0^n f_n(u)\,du$$

où f_n est la fonction définie dans **II**.

5°. En utilisant **II**.4 et la formule de Stirling (S), déduire que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Exercice .48 Soient $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on suppose que $m < n$.

1°. Déterminer une primitive $F_{n,m}$ de la fonction

$$f_{n,m}(x) = \frac{x^{2m-1}}{1+x^{2n}}$$

Calculer ensuite $\lim\limits_{x\to+\infty} F_{n,m}(x) - F_{n,m}(0)$.

2°. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m-1}}{1+x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{2n\sin(\pi m/n)} \qquad 0 < m < n.$$

3°. En effectuant un changement de variable convenable montrer que, pour $\alpha \in \mathbb{Q} \cap \,]0,1[$

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

Calculer, ensuite, $I(\alpha)$ pour $\alpha \in]0,1[$.

4°. Pour $q \in \mathbb{N}^*$,$(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, avec $m < n$, on pose

$$J(n,m,q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{m-1}}{(1+t^n)^q}\,dt.$$

Trouver une relation simple entre $J(n,m,q+1)$ et $J(n,m,q)$. En déduire $J(n,m,q)$.