SMO 2009

كانون الثاني 2009

- مدّة الاختبار أربع ساعات.
- يحوي الاختبار سبع مسائل، يمكن حلّها بأيّ ترتيب.
- يحصل الطالب على سبع درجات على كلّ مسألة يحلّها حلاً كاملاً.

المسألة الأولى

أوجد جميع الحلول الحقيقيّة (x,y,z) لجملة المعادلات التالية :
$$\left.\begin{aligned} z &= x\cdot y\\ z &= x+y\\ z &= x/y\end{aligned}\right\}$$

الحل

بطرح المعادلة الثالثة من الأولى نجد أنّ $x\left(y-\dfrac{1}{y}\right)=0$ إذن :

- إمّا أن يكون $x=0$ ، وهذا يقتضي أنّ $z=0$ بسبب المعادلة الأولى، وهذان الأمران معاً يقتضيان أن يكون $y=0$ بسبب المعادلة الثانية، فنصل إلى **تناقض** إذْ لا يمكن أن ينعدم y استناداً إلى المعادلة الثالثة. فلا توجد حلولٌ تحقّق $x=0$.
- وإمّا أن يكون $y-\dfrac{1}{y}=0$، أي $y^2=1$، وهنا نناقش حالتين :
  - إمّا أن يكون $y=1$، وهذا يقتضي أنّ $z=x$ وفق المعادلة الأولى، ومن ثَمّ أنّ $y=0$، بعد التعويض في المعادلة الثانية. هذا أيضاً **تناقضٌ**.
  - بقيتْ إذن حالة $y=-1$، وهي تقتضي أن يكون $z=-x=x-1$ وفق المعادلتين الأولى والثانية. ومنه $x=\frac{1}{2}$ و $z=-\frac{1}{2}$.

وبالعكس، نتيقّن مباشرة أنّ $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2}\right)$ حلٌّ لجملة المعادلات المطروحة. فهو إذن الحلّ الوحيد للجملة. ❁

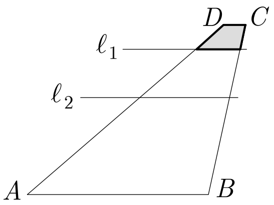
المسألة الثانية

أثبت أنّه أياً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n، فإنّ
$$n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\geq(n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)$$

الحل

لنعرّف $x=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\dfrac{1}{n}$ من الواضح أنّ $x\leq n$ لأنّ x هو مجموع n حدّاً كلٌّ منها أصغر من 1. ولدينا
$$n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-(n+1)\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)=nx-(n+1)\left(x+\frac{1}{n+1}-1\right)=n-x\geq 0$$
وهي المتراجحة المطلوبة. ❁

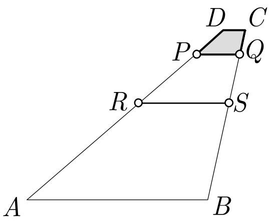
المسألة الثالثة



نتأمّل رباعيّاً $ABCD$ ضلعاه $[DC]$ و $[AB]$ متوازيان، وأطوال أضلاعه كما يلي: $AB = 16,\ BC = 21,\ CD = 2,\ DA = 28$.

يقسم مستقيمان ℓ_1 و ℓ_2 موازيان للضلعين $[DC]$ و $[AB]$ المضلّع $ABCD$ إلى ثلاثة مضلّعات متشابهة. احسب محيط أصغر هذه المضلّعات.

الحل



لنسمِّ P و Q نقطتي تقاطع ℓ_1 مع (AD) و (BC) بالترتيب، وكذلك لنسمِّ R و S نقطتي تقاطع ℓ_2 مع (AD) و (BC) بالترتيب.

لتكن k نسبة تشابه المضلّعين $PQCD$ و $RSQP$ فيكون $k = \dfrac{DC}{PQ} = \dfrac{PQ}{RS}$. ومن تشابه المضلّعين $RSQP$ و $ABSR$ نجد أنّ $\dfrac{PQ}{RS} = \dfrac{RS}{AB}$. إذن $k = \dfrac{DC}{PQ} = \dfrac{PQ}{RS} = \dfrac{RS}{AB}$.

وبحساب جداء ضرب هذه النسب نجد

$$k^3 = \frac{DC}{\cancel{PQ}} \cdot \frac{\cancel{PQ}}{\cancel{RS}} \cdot \frac{\cancel{RS}}{AB} = \frac{DC}{AB} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

إذن $k = \dfrac{1}{2}$، ومن ثَمّ $PQ = \dfrac{1}{k}DC$ أي $\boxed{PQ = 4}$.

من جهة أخرى، نستنتج من $CQ = kQS = k^2SB$ أنّ $SB = 4CQ$ و $QS = 2CQ$ إذن

$$CB = CQ + QS + SB = (1 + 2 + 4)CQ = 7CQ$$

وعليه $\boxed{CQ = 3}$. ومن مبرهنة تالس لدينا $\dfrac{DP}{DA} = \dfrac{CQ}{CB} = \dfrac{1}{7}$، إذن $\boxed{DP = 4}$. وهكذا نجد أنّ محيط $PQCD$ يساوي 13. وهي النتيجة المطلوبة.

المسألة الرابعة

① ليكن x عدداً صحيحاً. ما هي القيم الممكنة لباقي قسمة x^2 على العدد 7 ؟

② ليكن x و y عددين صحيحين، ولنفترض أنّ العدد 7 يقسم $x^2 + y^2$. أثبت أنّ العدد 7 يقسم كلاً من x و y.

③ أوجد جميع الثنائيات (x, y) من الأعداد الطبيعيّة التي تحقّق $x^2 + y^2 = 2009$.

الحل

① القيم الممكنة لباقي قسمة x على 7 هي $\{0,1,2,3,4,5,6\}$، أمّا مجموعة بواقي قسمة مربّعات هذه الأعداد على 7 فهي $\{0,1,4,2,2,4,1\}$ فإذا حذفنا التكرار استنتجنا أنّ مجموعة القيم الممكنة لباقي قسمة x^2 على 7 فهي $\{0,1,4,2\}$.

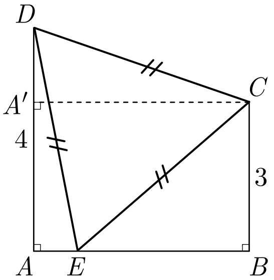
② لنفترض أنّ 7 يقسم $x^2 + y^2$، ولنفترض على سبيل الجدل أنّ 7 لا يقسم x. عندئذ يكون باقي قسمة x^2 على 7، ولنسمِّه r، واحداً من الأعداد $\{1,2,4\}$. نستنتج من كون 7 قاسماً للعدد $r + y^2$ أنّ باقي قسمة y^2 على 7 يساوي $7 - r$، أي أنّ باقي قسمة y^2 على 7 هو أحد الأعداد $\{6,5,3\}$ وهذا يتناقض مع ①.

إذن 7 يقسم العددَ x، ولأنّه يقسم أيضاً العدد $x^2 + y^2$، استنتجنا أنّ العدد 7 يقسم y^2، أي أنّه يقسم y.

③ الملاحظة الأساسيّة هي أنّ 7 يقسم 2009. فإذا كان $x^2+y^2=2009$ استنتجنا من النقطة ② أنّ 7 يقسم كلاً من x و y أي أنّ $x=7a$ و $y=7b$. إذن $a^2+b^2=\frac{2009}{49}=41$. ينبغي أن نعيّن الأعداد الطبيعية a من المجموعة $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ التي يكون عندها العدد $41-a^2$ مربّعاً كاملاً (لأنّه يساوي b^2). وهذا أمر يسير، إذْ نجد فقط القيمتين $a=4$ و $a=5$. نستنتج إذن أنّ $(a,b)=(4,5)$ أو $(a,b)=(5,4)$ وعليه

$$(x,y)\in\{(28,35),(35,28)\}$$

وبالعكس، نتيقّن مباشرة أنّ $(28)^2+(35)^2=2009$. فمجموعة الثنائيّات المطلوبة هي $\{(28,35),(35,28)\}$. ❁



المسألة الخامسة

$ABCD$ هو شبه منحرف قائم في A و B ، فيه $BC=3$ و $AD=4$. E هي نقطة من $[AB]$. إذا علمتَ أنّ المثلّث CDE متساوي الأضلاع، فاحسب طول ضلع هذا المثلّث.

الحل

لنضع $AE=x$ و $EB=y$ و $DC=\ell$. وليكن A' مسقط C على (AD). باستخدام مبرهنة فيثاغورث في كلٍّ من المثلّثات القائمة DAE و EBC و $DA'C$ نجد

$$\ell^2=16+x^2=9+y^2=1+(x+y)^2$$

إذن من جهة أولى لدينا $x^2=\ell^2-16$ و $y^2=\ell^2-9$ وأخيراً

$$\ell^2=1+x^2+y^2+2xy=1+\ell^2-16+\ell^2-9+2xy=2\ell^2-24+2xy$$

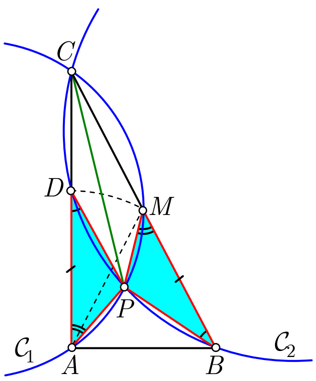
ومنه $2xy=24-\ell^2$، إذن

$$\left(24-\ell^2\right)^2=4x^2y^2=4\left(\ell^2-16\right)\left(\ell^2-9\right)$$

وهذا يُكافئ $3\ell^4-52\ell^2=0$. ولأنّ $\ell\neq 0$ استنتجنا أنّ $\ell=2\sqrt{13/3}$، وهو طول ضلع المثلّث المطلوب. ❁

المسألة السادسة

نتأمّل مثلّثاً ABC قائماً في A، ولتكن M منتصف الوتر $[BC]$. نفترض وجود نقطة D من الضلع $[AC]$ تُحقّق $AM=AD$. لتكن $\mathcal{C}_1$ الدائرة المارّة برؤوس المثلّث AMC، ولتكن $\mathcal{C}_2$ الدائرة المارّة برؤوس المثلّث BDC. تشترك الدائرتان $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ بالنقطة C وتتقاطعان ثانية في نقطة نسميّها P. أثبت أنّ المستقيم (CP) ينصّف الزاوية $\widehat{ACB}$.



الحل

في المثلّث القائم، طول المتوسّط المتعلّق بالوتر يساوي نصف طول الوتر، إذن

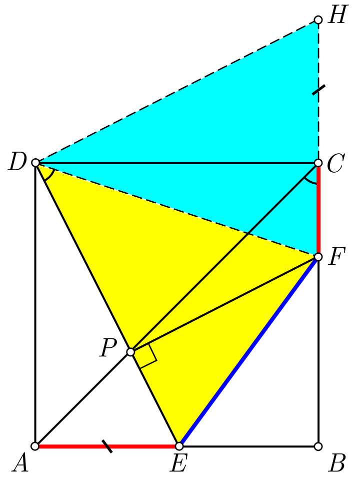
$$AD=AM=BM$$

الرباعي $APMC$ دائري إذن $\widehat{DAP}=\widehat{PMB}$. وكذلك الرباعي $CDPB$ رباعي دائري، إذن $\widehat{ADP}=\widehat{PBM}$. نستنتج من ذلك تطابق المثلّثين APD و MPB. نستنتج إذن أنّ $PA=PM$، ومنه تطابق القوسين $\overparen{PM}$ و $\overparen{PA}$ من $\mathcal{C}_1$، ومنه تساوي الزاويتين $\widehat{PCM}$ و $\widehat{ACP}$، فالمستقيم (CP) ينصّف الزاوية $\widehat{ACB}$. ❁

المسألة السابعة

تأمّل مربّعاً $ABCD$ ونقطة E من الضلع $[AB]$. لتكن P نقطة تقاطع $[DE]$ مع القطر $[AC]$. نرسم من P مستقيماً عمودياً على (DE) فيقطع هذا المستقيمُ الضلع $[BC]$ في F. أثبت أنّ

$$EA + FC = EF$$



الحل

نمدّد القطعة المستقيمة $[FC]$ إلى H بحيث تقع C بين F و H، ويكون $CH = AE$.

عندئذ تؤول المسألة إلى إثبات أنّ $EF = FH$.

من تطابق المثلّثين القائمين DAE و DCH نستنتج أنّ

$$\widehat{ADE} = \widehat{CDH} \quad \text{و} \quad DH = DE$$

إذن

$$\widehat{EDH} = \widehat{EDC} + \widehat{CDH} = \widehat{EDC} + \widehat{AED} = \widehat{ADC} = 90°$$

من جهة أخرى، الرباعي $DPFC$ رباعي دائري لأنّ $\widehat{DPF} = \widehat{FCD} = 90°$، ينتج من ذلك أنّ $\widehat{PDF} = \widehat{PCF} = 45°$. ومن ثَمّ $\widehat{EDF} = \widehat{FDH} = 45°$.

إذن، المثلّثان EDF و HDF طبوقان لتطابق ضلعين وزاوية من الأوّل مع مقابلاتهما من الثاني، وبوجه خاص يكون لدينا $CH = AE$، وهذا كما رأينا يُكافئ $EA + FC = EF$، وهي النتيجة المرجوّة. ❁