كانون الثاني 2009

- مدّة الاختبار أربع ساعات.
- يحوي الاختبار سبع مسائل، يمكن حلّها بأيّ ترتيب.
- يحصل الطالب على سبع درجات على كلّ مسألة يحلّها حلاً كاملاً.

المسألة الأولى

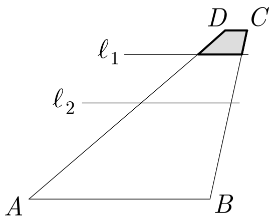
أوجد جميع الحلول الحقيقيّة (x,y,z) لجملة المعادلات التالية :
$$\left.\begin{aligned} z &= x\cdot y \\ z &= x+y \\ z &= x/y \end{aligned}\right\}$$

المسألة الثانية

أثبت أنّه أياً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n، فإنّ

$$n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\geq(n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)$$

المسألة الثالثة



نتأمّل رباعيّاً $ABCD$ ضلعاه $[DC]$ و $[AB]$ متوازيان، وأطوال أضلاعه كما يلي:

$$AB=16,\ BC=21,\ CD=2,\ DA=28$$

يقسم مستقيمان ℓ_1 و ℓ_2 موازيان للضلعين $[DC]$ و $[AB]$ المضلّع $ABCD$ إلى ثلاثة مضلّعات متشابهة. احسب محيط أصغر هذه المضلّعات.

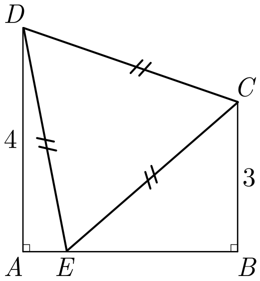
المسألة الرابعة

① ليكن x عدداً صحيحاً. ما هي القيم الممكنة لباقي قسمة x^2 على العدد 7 ؟

② ليكن x و y عددين صحيحين، ولنفترض أنّ العدد 7 يقسم x^2+y^2. أثبت أنّ العدد 7 يقسم كلاً من x و y.

③ أوجد جميع الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعيّة التي تحقّق $x^2+y^2=2009$.

المسألة الخامسة



$ABCD$ هو شبه منحرف قائم في A و B، فيه $BC = 3$ و $AD = 4$.
E هي نقطة من $[AB]$. إذا علمتَ أنّ المثلّث CDE متساوي الأضلاع، فاحسب طول ضلع هذا المثلّث.

المسألة السادسة

نتأمّل مثلّثاً ABC قائماً في A، ولتكن M منتصف الوتر $[BC]$. نفترض وجود نقطة D من الضلع $[AC]$ تُحقّق $AM = AD$. لتكن $\mathcal{C}_1$ الدائرة المارّة برؤوس المثلّث AMC، ولتكن $\mathcal{C}_2$ الدائرة المارّة برؤوس المثلّث BDC. تشترك الدائرتان $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ بالنقطة C وتتقاطعان ثانية في نقطة نسمّيها P. أثبت أنّ المستقيم (CP) ينصّف الزاوية $\widehat{ACB}$.

المسألة السابعة

تأمّل مربّعاً $ABCD$ ونقطة E من الضلع $[AB]$. لتكن P نقطة تقاطع $[DE]$ مع القطر $[AC]$. نرسم من P مستقيماً عمودياً على (DE) فيقطع هذا المستقيمُ الضلع $[BC]$ في F. أثبت أنّ

$$EA + FC = EF$$