NATIONAL COMMISSION FOR THE SYRIAN SCIENCE OLYMPIAD

الهيئة الوطنيّة للأولمبياد العلمي السوري

أولمبياد الرياضيّات 2011

تصحيح

14 كانون الثاني 2011

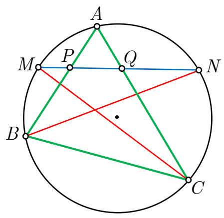
اليوم الأوّل

مدّة الاختبار أربع ساعات

المسألة الأولى

لتكن $\mathcal{C}$ الدائرة المارة برؤوس مثلّث ABC. يقطع منصّفُ الزاوية $\widehat{C}$ الدائرةَ $\mathcal{C}$ في M، ويقطع منصّفُ الزاوية $\widehat{B}$ الدائرةَ $\mathcal{C}$ في N. نفترض أنّ الوتر $[MN]$ يقطع الضلعين $[AB]$ و $[AC]$ في P و Q بالترتيب. أثبت أنّ المثلّث APQ متساوي الساقين.

الحل



نعلم أنّ الزاوية الداخلية في دائرة تساوي نصف مجموع قياسي القوسين اللتين تحصرهما، إذن

$$\widehat{APN} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{NA} + \overset{\frown}{MB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{CN} + \overset{\frown}{AM}\right) = \widehat{AQM}$$

فالمثلّث APQ متساوي الساقين. هنا استفدنا من كون N منتصف القوس $\overset{\frown}{AC}$، و M منتصف القوس $\overset{\frown}{AB}$.

المسألة الثانية

ليكن n عدداً طبيعياً موجباً تماماً. نسمّي صفيفة من المرتبة n كلَّ جدول مكوّن من n سطراً و n عموداً عناصره من المجموعة $\{0,1\}$. فمثلاً

$$\begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline\end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1\\ \hline 1 & 1\\ \hline\end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0\\ \hline 1 & 1 & 1\\ \hline 1 & 1 & 1\\ \hline\end{array}$$

هي صفيفات من المراتب 1 و 2 و 3 بالترتيب. نقول إنّ العدد الطبيعي الموجب تماماً n «عددٌ جيدٌ» إذا وُجِدَتْ صفيفة من المرتبة n مجاميع عناصر أسطرها مختلفة مثنى مثنى، ومجاميع عناصر أعمدتها متساوية. ونقول إنّ العدد n «عددٌ ممتازٌ» إذا وُجِدَتْ صفيفة من المرتبة n مجاميع عناصر أسطرها <u>غير معدومة</u> ومختلفة مثنى مثنى، ومجاميع عناصر أعمدتها متساوية.

1. عيّن طبيعة الأعداد n من المجموعة $\{1,2,3,4\}$، وذلك من حيث كونها جيّدة أو ممتازة.
2. أوجد $\mathcal{G}$ مجموعة الأعداد الجيّدة.
3. أوجد $\mathcal{E}$ مجموعة الأعداد الممتازة.

الحل

❶ بالنظر إلى الصفيفات

$$\begin{bmatrix}1\end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix} \text{ و }$$

نرى مباشرة أنّ جميع الأعداد n من $\{1,2,3,4\}$ هي أعداد جيّدة، وأنّ العددان $\{1,3\}$ هما عددان ممتازان.

❷ لنلاحظ أوّلاً أن الأعداد الممتازة هي جيدة أيضاً. ولنناقش حالتين :

- n عددٌ فرديٌ أكبر من 1 أي $n = 2m-1$ مع $m \geq 2$. في هذه الحالة نتأمّل الصفيفة O_n المعرّفة كما يلي :

$$O_n = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
1&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0\\
1&1&\ddots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\
\vdots&&\ddots&0&\vdots&&\vdots&\vdots\\
1&1&\cdots&1&0&\cdots&0&0\\
\hline
0&\cdots&\cdots&0&1&\cdots&1&1\\
0&\cdots&0&1&1&\cdots&1&1\\
\vdots&\iddots&\iddots&\vdots&\vdots&&&\vdots\\
0&1&&1&1&&&1\\
1&\cdots&\cdots&1&1&\cdots&\cdots&1
\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ m-1\\ \\ \\ \\ m\\ \\ \\ \end{array}$$

$$\qquad\quad m-1 \qquad\qquad\quad m$$

فنجد أنّ مجموع كلّ عمود يساوي m ومجاميع الأسطر هي عناصر المجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ فالعدد $n = 2m-1$ عددٌ ممتازٌ، وهو من ثَمّ جيدٌ.

- n عددٌ زوجي أكبر من 1 أي $n = 2m$ مع $m \geq 1$. في هذه الحالة نتأمّل الصفيفة E_n المعرّفة كما يلي :

$$E_n = \left[\begin{array}{ccccc|cccc}
0&\cdots&\cdots&0&0&0&\cdots&0&0\\
1&0&\cdots&0&0&0&\cdots&0&0\\
1&1&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\
\vdots&&\ddots&0&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\
1&1&\cdots&1&0&0&\cdots&0&0\\
\hline
0&\cdots&\cdots&0&1&1&\cdots&1&1\\
0&\cdots&0&1&\vdots&1&\cdots&1&1\\
\vdots&\iddots&\iddots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\
0&1&&1&1&1&&\vdots&1\\
1&\cdots&\cdots&1&1&1&\cdots&1&1
\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ m\\ \\ \\ \\ \\ m\\ \\ \\ \end{array}$$

$$\qquad\quad m \qquad\qquad\quad m$$

فنجد أنّ مجموع كلّ عمود يساوي m ومجاميع الأسطر هي عناصر المجموعة $\{0,1,2,\ldots,n\}\backslash\{m\}$ فالعدد $n = 2m$ عددٌ جيدٌ.

نستنتج من المناقشة السابقة أنّ جميع الأعداد الطبيعية الموجبة تماماً هي أعداد جيدة. أي إنّ $\mathcal{G} = \mathbb{N}^*$.

❸ نستنتج من الدراسة السابقة أيضاً أنّ جميع الأعداد الطبيعيّة الفردية هي أعداد ممتازة. أي

$$\mathcal{E} \supset \{2m-1 : m \geq 1\}$$

لنبرهن أنّه لا توجد أعداد زوجية ممتازة.

لنفترض أن العدد n عددٌ ممتازٌ، ولنتأمّل صفيفة من المرتبة n تكون مجاميع أسطرها غير معدومة ومختلفة مثنى مثنى، ومجاميع أعمدتها متساوية، وتساوي c . لمّا كانت مجاميع الأسطر تكوّن n عدداً مختلفاً من المجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ التي عدد عناصرها يساوي n أيضاً، استنتجنا أنّ مجاميع أسطر الصفيفة هي $\{1,2,\ldots,n\}$. فإذا حسبنا عدد الواحدات في الصفيفة انطلاقاً من الأسطر وجدنا أنّه يساوي $\frac{n(n+1)}{2} = 1+2+\cdots+n$. أمّا إذا حسبنا عدد الواحدات في الصفيفة انطلاقاً من الأعمدة لوجدنا أنّه يساوي cn . إذن $\frac{n(n+1)}{2} = cn$، أو $n = 2c-1$ ، فهو إذن عددٌ فردي. وعليه $\mathcal{E} = \{2m-1 : m \geq 1\}$.

المسألة الثالثة

نفترض أنّ الأعداد a و b و c هي أطوال أضلاع مثلّث. أثبت أنّ الأعداد $\frac{1}{a+b}$ و $\frac{1}{b+c}$ و $\frac{1}{c+a}$ تمثّل أيضاً أطوال أضلاع مثلّث.

الحل

نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}-\frac{1}{b+c} &= \frac{(b+c)(2a+b+c)-(a+b)(a+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\ &= \frac{2a(b+c)+(b+c)^2-a^2-a(b+c)-bc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\ &= \frac{a(b+c-a)+(b-c)^2+3bc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\end{aligned}$$

ولكن $b+c>a$، والأعداد a و b و c موجبة. فالبسط في الكسر السابق موجب تماماً وكذلك المقام إذن

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}>\frac{1}{b+c}$$

ونبرهن بالمثل المتراجحتين الأخريين.