NATIONAL COMMISSION FOR THE SYRIAN SCIENCE OLYMPIAD

الهيئة الوطنيّة للأولمبياد العلمي السوري

أولمبياد الرياضيّات 2011

15 كانون الثاني 2011

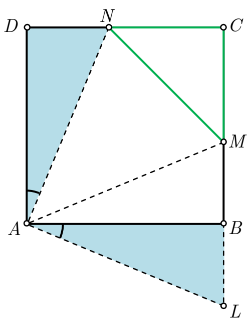
اليوم الثاني

مدّة الاختبار أربع ساعات

تصحيح

المسألة الأولى

ليكن $ABCD$ مربّعاً، ولتكن M و N نقطتين من الضلعين $[BC]$ و $[CD]$ بالترتيب. إذا علمتَ أنّ محيط المثلّث MCN يساوي ضعفي طول ضلع المربّع، فاحسب قياس الزاوية $\widehat{MAN}$.



الحل

طريقة أولى : استناداً إلى الفرض لدينا

$$DC + CB = CN + MN + MC$$

ومن ثَمّ

$$DN + BM = MN$$

لنختر على نصف المستقيم $[MB)$ نقطة L تُحقّق $ML = MN$. فيكون لدينا استناداً إلى المساواة السابقة :

$$DN = MN - MB = ML - MB = BL$$

ولأنّ $AB = AD$ استنتجنا تطابق المثلّثين القائمين ADN و ABL. وبوجه خاص

$$AL = AN \quad \text{و} \quad \widehat{BAL} = \widehat{DAN}$$

نستنتج أيضاً تطابق المثلثين MAL و MAN لتطابق أضلاع الأوّل مع نظرائها من الثاني. إذن

$$\begin{aligned} 2\widehat{MAN} &= \widehat{MAN} + \widehat{MAL} = \widehat{MAN} + \widehat{MAB} + \widehat{BAL} \\ &= \widehat{MAN} + \widehat{MAB} + \widehat{DAN} = \widehat{BAD} = 90^\circ \end{aligned}$$

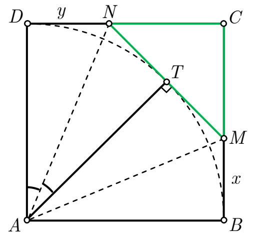
إذن $\widehat{MAN} = 45^\circ$. ■

طريقة ثانية : لنضع $x = DN$ و $y = BM$، ولنفترض أن طول ضلع المربّع يساوي a. بحسب الفرض $DN + BM$ يساوي MN، إذن بتطبيق مبرهنة فيثاغورث على CNM لدينا $(a-x)^2 + (a-y)^2 = (x+y)^2$ أو

$$a^2 - a(x+y) - xy = 0$$

لنحسب الآن $\mathcal{S}_{AMN}$ مساحة المثلّث AMN :

$$\mathcal{S}_{AMN} = a^2 - \frac{ax}{2} - \frac{ay}{2} - \frac{(a-x)(a-y)}{2} = \frac{a^2 - xy}{2} = \frac{a(x+y)}{2} = \frac{1}{2}a \cdot MN$$



إذن إذا كانت T موقع الارتفاع النازل من A على $[MN]$ في المثلّث AMN كان $AT = a$. والدائرة التي مركزها A ونصف قطرها a تمس (MN) في T. إذن (MB) و (MT) مماسان للدائرة منبعثان من النقطة M. فالمستقيم (AM) ينصف الزاوية $\widehat{TAB}$. وبالمثل (AN) ينصف الزاوية $\widehat{TAD}$. وعليه

$$2\widehat{MAN} = 2\widehat{MAT} + 2\widehat{NAT} = \widehat{BAT} + \widehat{DAT} = \widehat{BAD} = 90^\circ$$

إذن $\widehat{MAN} = 45^\circ$.

المسألة الثانية

نُذكّر أنّ تبديلاً على المجموعة $X = \{0,1,2,\ldots,9\}$ هو أي ترتيب لعناصر هذه المجموعة. فمثلاً $s_0 = (0,2,4,1,5,7,9,3,8,6)$ هو تبديل على X. في حالة تبديل s على X، نرمز بالرمز $M(s)$ إلى أكبر مجموع لثلاثة عناصر متتالية في هذا التبديل. فمثلاً $M(s_0)$ هو أكبر الأعداد 6، 7، 10، 13، 21، 19، 20، 17 أي $M(s_0) = 21$.

(a) أعط مثالاً على تبديل s_1 على X يُحقّق $M(s_1) = 13$.

(b) هل يوجد تبديل s_2 على X يُحقّق $M(s_2) = 12$ ؟ علّل إجابتك.

الحل

(a) هناك عدّة حلول مثلاً :

(9,1,3,6,2,4,7,0,5,8),	(9,4,0,7,5,1,6,2,3,8),	(9,4,0,6,5,1,7,3,2,8),	(9,4,0,8,2,3,6,1,5,7),
(9,1,3,7,2,4,6,0,5,8),	(9,1,3,6,4,2,7,0,5,8),	(9,0,4,7,1,5,6,2,3,8),	(9,4,0,8,2,3,7,1,5,6),
(9,3,1,6,4,2,7,0,5,8),	(9,3,1,6,2,4,7,0,5,8),	(9,4,0,7,5,1,6,3,2,8),	(9,4,0,8,3,2,6,1,5,7),
(9,3,1,7,4,2,6,0,5,8),	(9,3,1,7,2,4,6,0,5,8),	(9,1,3,8,0,5,6,2,4,7),	(9,4,0,8,3,2,6,5,1,7),
(9,4,0,6,5,1,7,2,3,8),	(9,3,1,7,4,2,6,5,0,8),	(9,3,1,8,0,5,6,2,4,7),	(9,4,0,8,3,2,7,1,5,6),
(9,4,0,7,1,5,6,2,3,8).			

(b) الجواب هو **لا**. لإثبات ذلك نفترض على سبيل الجدل أنّه يوجد تبديل

$$s_2 = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$$

يُحقّق $M(s_2) = 12$. ولنتذكّر أنّ

$$\sum_{k=0}^{9} x_k = \sum_{k=0}^{9} k = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

عندئذ يكون لدينا

$$45 = x_0 + (x_1 + x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6) + (x_7 + x_8 + x_9) \leq x_0 + 12 + 12 + 12 = x_0 + 36$$

إذن $x_0 \geq 45 - 36 = 9$ فلا بُدّ أن يكون $x_0 = 9$.

وبالمثل لدينا :

$$45 = (x_0 + x_1 + x_2) + (x_3 + x_4 + x_5) + (x_6 + x_7 + x_8) + x_9 \leq 12 + 12 + 12 + x_9 = 36 + x_9$$

إذن $x_9 \geq 45 - 36 = 9$ فلا بُدّ أن يكون $x_9 = 9$.

وهذا يناقض تعريف التبديل فلا يمكن أن يكون $x_0 = x_9 = 9$. وهذا التناقض يبرهن أنّه لا يوجد تبديل s_2 يُحقّق $M(s_2) = 12$.

المسألة الثالثة

أراد مهندسٌ بناء بُرجٍ في حارتنا ارتفاعه x متراً و y سنتمتراً، فأجرى حساباته، ولكنّه أخطأ في مكانٍ ما ليجد نفسه قد بنى برجاً ارتفاعه y متراً و x سنتمتراً!. كافأه مُختار الحارة على هذا الخطأ، إذْ كان ارتفاع البرج الذي بناه أعلى بسنتمترين اثنين من ضعفي ارتفاع البرج الذي كان مقرّراً. فكم أصبح ارتفاع برج حارتنا.

الحل

ارتفاع البرج الأصلي بالسنتمترات هو $100x+y$ أما ارتفاع البرج الذي بناه المهندس فهو $100y+x$ ووقوع هذا الخطأ يُعطينا المعلومة أنّ x و y ينتميان إلى المجال $[0,99]$. أمّا المُكافأة التي حصل عليها المهندس فسببها أنّ

$$100y+x=2+2(100x+y)$$

أو $98y=2+199x$. ولكنّ هذا يقتضي أنّ x عددٌ زوجي، لنضع إذن $x=2z$ فيكون

$$49y-199z=1$$

بملاحظة أنّ $199=4\times 49+3$ نكتب المعادلة السابقة بالشكل

$$49(y-4z)-3z=1$$

ثُمّ بملاحظة أنّ $3\times 16=49-1$ نكتب المعادلة السابقة بالشكل

$$16\times 49(y-4z)-(49-1)z=16$$

أي

$$49(16y-65z)=16-z$$

إذن العدد $16-z$ عددٌ صحيحٌ من مضاعفات 49 وهو يحقّق المتراجحة

$$16\geq 16-z\geq 16-49=-33$$

فلابُدّ أنه يساوي 0. أي $z=16$ و $y=65$. وأخيراً $x=32$. وهكذا أصبح ارتفاع برج حارتنا مساوياً 65 متراً و 32 سنتمتراً.