NATIONAL COMMISSION FOR
THE SYRIAN SCIENCE OLYMPIAD

الهيئة الوطنيّة
للأولمبياد العلمي السوري

25 آذار 2011

مدّة الاختبار أربع ساعات – يضم هذا الاختبار ستّ مسائل لكلّ منها سبع درجات

المسألة الأولى

نتأمّل مثلّثاً ABC فيه $AC \neq AB$. يقطع المنصفان الداخلي والخارجي للزاوية $\widehat{BAC}$ المستقيم (BC) في A_1 و A_2 بالترتيب. لتكن M مركز الدائرة Γ التي قطرها $[A_1A_2]$، و D نقطة من الدائرة Γ مختلفة عن A_1 و A_2. أثبت أنّ المستقيم (MD) يمسّ الدائرة المارة برؤوس المثلّث BCD.

المسألة الثانية

نتأمّل مثلّثاً ABC. لتكن M منتصف $[BC]$ و H نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث ABC. وأخيراً لتكن P المسقط القائم للنقطة H على (AM). أثبت أنّ $4AM \cdot PM = (BC)^2$.

المسألة الثالثة

لتكن x و y و z ثلاثة أعداد حقيقيّة، تُحقّق المساواة $3(x^4+y^4+z^4+1)=4(x^3+y^3+z^3)$. احسب قيمة المقدار $x+y+z$.

المسألة الرابعة

أوجد جميع التوابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ التي تُحقّق، أياً كان العددان الحقيقيان x و y من $[0,1]$، المتراجحة $(\mathcal{I})$ التالية : $|x-y|^2 \leq \left|f(x)-f(y)\right| \leq |x-y|$.

المسألة الخامسة

ليكن m عدداً صحيحاً. نفترض وجود عددين صحيحين موجبين x و y يُحقّقان

$$x^2+y^2+1=mxy$$

أثبت أنّ $m=3$. (إرشاد : ماذا تقول عن حل (x,y) للمعادلة السابقة فيه x أصغر ما يمكن ؟)

المسألة السادسة

كتب تلميذ الأعداد $\{1,2,3,\ldots,2011\}$ على السبورة، ثُم بدأ يلعب اللعبة التالية : يختار في كلّ مرّة عددين x و y مكتوبين على السبّورة، ثُم يمحوهما ويكتب بدلاً منهما عدداً واحداً هو $|x-y|$. ويستمرّ في ذلك حتّى يبقى على السبورة عددٌ واحدٌ نسميّه ناتج اللعبة.

① أثبت أن ناتج اللعبة هو دوماً عددٌ زوجي.

② ليكن k عدداً ما من المجموعة $\{0,1,2,\ldots,1005\}$. بيّن أنّه يمكن للتلميذ أن يلعب بحيث يكون العدد $2k$ هو ناتج اللعبة.

NATIONAL COMMISSION FOR

THE SYRIAN SCIENCE OLYMPIAD

الهيئة الوطنيّة

للأولمبياد العلمي السوري

أولمبياد الرياضيّات 2011

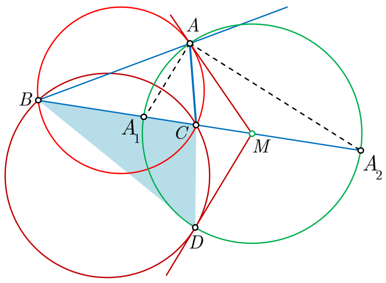
25 آذار 2011

تصحيح

مدّة الاختبار أربع ساعات

المسألة الأولى

نتأمّل مثلّثاً ABC فيه $AC \neq AB$. يقطع المنصفان الداخلي والخارجي للزاوية $\widehat{BAC}$ المستقيم (BC) في A_1 و A_2 بالترتيب. لتكن M مركز الدائرة Γ التي قطرها $[A_1A_2]$، و D نقطة من الدائرة Γ مختلفة عن A_1 و A_2. أثبت أنّ المستقيم (MD) يمسّ الدائرة المارة برؤوس المثلّث BCD.



الحل

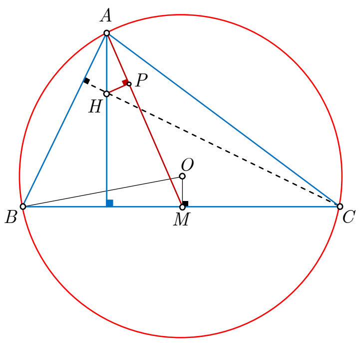
الزاوية $\widehat{A_1AA_2}$ قائمة لتعامد المنصّفين الداخلي والخارجي للزاوية $\widehat{BAC}$، إذن تقع A على الدائرة Γ. والمثلّث AMA_1 متساوي الساقين، إذن

$$\widehat{MAA_1} = \widehat{MA_1A}$$

أو $\widehat{MAC} + \frac{1}{2}\widehat{A} = \widehat{B} + \frac{1}{2}\widehat{A}$، وهذا يقتضي أنّ $\widehat{MAC} = \widehat{B}$. فالمستقيم (MA) يمس الدائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC. وهذا يبرهن على أنّ $\overline{MC}\cdot\overline{MB} = \overline{MA}^2 = \overline{MD}^2$، فالمستقيم (MD) يمس الدائرة المارّة برؤوس المثلّث BCD.

المسألة الثانية

نتأمّل مثلّثاً ABC. لتكن M منتصف $[BC]$ ولتكن H نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث. وأخيراً لتكن P المسقط القائم للنقطة H على (AM). أثبت أنّ $4AM\cdot PM = (BC)^2$.



الحل

$\overrightarrow{PM}$ هو المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{HM}$ على $\overrightarrow{AM}$ إذن

$$AM\cdot PM = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{HM}$$

لتكن O مركز الدائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC. فيكون لدينا

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OM} - (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\\ &= \overrightarrow{OM} - (\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM}) = -\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}\end{aligned}$$

لأنّ $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ و $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. ومن ناحية أخرى $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$، إذن

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{HM} &= (\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA})\cdot(-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM})\\ &= \overline{OA}^2-\overline{OM}^2 = \overline{OB}^2-\overline{OM}^2 = \overline{BM}^2 = \frac{1}{4}\overline{BC}^2\end{aligned}$$

وهي النتيجة المرجوّة.

المسألة الثالثة

لتكن x و y و z ثلاثة أعداد حقيقيّة، تحقّق المساواة $3(x^4+y^4+z^4+1)=4(x^3+y^3+z^3)$.
احسب قيمة المقدار $x+y+z$.

الحل

لدينا

$$(3x^4-4x^3+1)+(3y^4-4y^3+1)+(3z^4-4z^3+1)=0 \qquad (*)$$

ولكن

$$3t^4-4t^3+1=(t^2-2t+1)(3t^2+2t+1)=(t-1)^2\underbrace{(2t^2+(t+1)^2)}_{>0}$$

إذن في الطرف الأيسر من $(*)$ لدينا مجموع ثلاثة مقادير أكبر أو تساوي الصفر، وهو من ثَمّ لا ينعدم إلا إذا كانت المقادير الثلاثة معدومة، أي إذا وفقط إذا كان $x=y=z=1$، وعندها يكون $x+y+z=3$.

المسألة الرابعة

أوجد جميع التوابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ التي تُحقّق، أياً كان العددان الحقيقيان x و y من $[0,1]$، المتراجحة $(\mathcal{I})$ التالية : $|x-y|^2\le\left|f(x)-f(y)\right|\le|x-y|$.

الحل

لنفترض وجود تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ يُحقّق المتراجحة $(\mathcal{I})$.

- عندئذ بوضع $(x,y)=(0,1)$ نجد $\left|f(1)-f(0)\right|=1$. إذن $f(1)-f(0)=\alpha\in\{-1,1\}$. لنعرّف إذن التابع الجديد $g(x)=\alpha(f(x)-f(0))$ ولنلاحظ أنّه يُحقّق $g(0)=0$ و $g(1)=1$ كما إنّ
$$\left|g(x)-g(y)\right|=\left|\alpha(f(x)-f(y))\right|=\left|f(x)-f(y)\right|$$
إذن g يُحقّق أيضاً المتراجحة $(\mathcal{I})$.
- ليكن x عدداً من المجال $[0,1]$ عندئذ باختيار $y=0$ و $y=1$ في المتراجحة $(\mathcal{I})$ يكون لدينا
$$\left|g(x)\right|\le x \quad \text{و} \quad \left|1-g(x)\right|\le 1-x$$
أو
$$-x\le g(x)\le x \quad \text{و} \quad x-1\le 1-g(x)\le 1-x$$
وهذا يُكافئ
$$-x\le g(x)\le x \quad \text{و} \quad x\le g(x)\le 2-x$$
ولكنّ x هي النقطة الوحيدة المشتركة بين المجالين $[-x,x]$ و $[x,2-x]$. إذن $g(x)=x$. فنكون قد أثبتنا أنّ
$$\forall x\in[0,1],\quad g(x)=x$$
- وأخيراً لأنّ $f=\alpha g+f(0)$ نستنتج أنّ للتابع f الصيغة $f(x)=\alpha x+\beta$ حيث $\alpha\in\{-1,1\}$.

وبالعكس، يُحقّق كلُّ تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ من الصيغة $f(x)=\alpha x+\beta$ حيث $\alpha\in\{-1,1\}$، المتراجحة $(\mathcal{I})$ وضوحاً، فهي إذن مجموعة التوابع المطلوبة.

المسألة الخامسة

ليكن m عدداً صحيحاً. نفترض وجود عددين صحيحين موجبين x و y يُحقّقان

$$x^2+y^2+1=mxy$$

أثبت أنّ $m=3$. (إرشاد : ماذا تقول عن حل (x,y) للمعادلة السابقة فيه x أصغر ما يمكن ؟)

الحل

لنختر من بين جميع أزواج الأعداد الصحيحة الموجبة (x,y) التي تُحقّق $x^2+y^2+1=mxy$، زوجاً (a,b) تكون فيه a أصغر ما يمكن. لمّا كان (b,a) يُحقّق الخاصّة نفسها استنتجنا أنّ $a\le b$. ومن الواضح أنّ $1\le a$.

لنفترض على سبيل الجدل أنّ $a<b$. للمعادلة من الدرجة الثانية $y^2-may+1+a^2=0$ جذرٌ حقيقي موجبٌ تماماً هو b.

فإذا رمزنا b' إلى الجذر الآخر، كان لدينا $bb'=1+a^2$ و $b+b'=ma$.

نستنتج من $bb'=1+a^2$ أنّ $b'>0$، ونستنتج من $b'=ma-b$ أنّ b' عددٌ صحيح. كما إنّ

$$b(b'-a)=1+a^2-ab=1-a(b-a)$$

ولكن $(b-a)\ge 1$ و $a\ge 1$ إذن $a(b-a)\ge 1$ ومن ثَمّ $b(b'-a)\le 0$ أو $b'\le a$، وهكذا يكون (b',a) زوجاً من الأعداد الصحيحة الموجبة يُحقّق $a^2+b'^2+1=mab'$. فإذا تذكّرنا أنّ a أصغري استنتجنا أنّ $b'=a$، ومن ثَمّ

$$a^2+a^2+1=ma^2$$

أو $(m-2)a^2=1$. إذن a^2 هو عددٌ صحيح موجب يقسم الواحد فهو يساويه أي $a=1$ ومن ثَمّ $m=2+1=3$. ■

المسألة السادسة

كتب تلميذ الأعداد $\{1,2,3,\ldots,2011\}$ على السبورة، ثُم بدأ يلعب اللعبة التالية : يختار في كلّ مرّة عددين x و y مكتوبين على السبّورة، ثُم يمحوهما ويكتب بدلاً منهما عدداً واحداً هو $|x-y|$.
ويستمرّ في ذلك حتّى يبقى على السبورة عددٌ واحدٌ نسميّه ناتج اللعبة.

① أثبت أن ناتج اللعبة هو دوماً عددٌ زوجي.

② ليكن k عدداً ما من المجموعة $\{0,1,2,\ldots,1005\}$. بيّن أنّه يمكن للتلميذ أن يلعب بحيث يكون العدد $2k$ هو ناتج اللعبة.

الحل

① لنلاحظ أنّ العددين $x+y$ و $|x-y|$ يكونان زوجيين معاً أو فرديين معاً أي

$$x+y\equiv |x-y| \bmod 2$$

ولّما كان مجموع الأعداد على السبورة في البدء يساوي

$$1+2+\cdots+2011=\frac{2011\times 2012}{3}=2011\times 1006$$

وهو عددٌ زوجي، فإنّ مجموع الأعداد الموجودة على السبورة يبقى زوجياً بعد عمليّة، وهذا المجموع يساوي العدد الأخير المتبقي، فهذا العدد عددٌ زوجي.

② في الحقيقة، لنكتب $T_{a,b}$ إلى عملية محو العددين a و b وكتابة العدد $\left|b-a\right|$. سنعبّر بالرمز $a^{[\ell]}$ عن وجود العدد a مكرّراً ℓ مرّة على السبورة.

- بتطبيق العمليات $T_{2j,2j+1}$ عندما تتحوّل j من $k+1$ حتّى 1005 يصبح لدينا على السبورة

$$\{1^{[1005-k]},1,2,\ldots,2k,2k+1\}$$

- ثُم بتطبيق العمليات $T_{2j-1,2j}$ عندما تتحوّل j من 1 حتّى k يصبح لدينا على السبورة $\{1^{[1005]},2k+1\}$. (في حالة $k=0$ تُلغى هذه المرحلة.)
- ثمّ بتطبيق العملية T_{11} عدداً من المرّات يساوي 502 نصل إلى $\{0^{[502]},1,2k+1\}$.
- ثمّ بتطبيق العملية T_{01} عدداً من المرّات يساوي 502 نصل إلى $\{1,2k+1\}$.
- وأخيراً نطبّق العملية $T_{1,2k+1}$ ليبقى العدد $2k$ على السبورة. ■