NATIONAL COMMISSION FOR THE SYRIAN SCIENCE OLYMPIAD

الهيئة الوطنيّة للأولمبياد العلمي السوري

25 آذار 2011

مدّة الاختبار أربع ساعات – يضم هذا الاختبار ستّ مسائل لكلّ منها سبع درجات

المسألة الأولى

نتأمّل مثلّثاً ABC فيه $AC \neq AB$. يقطع المنصفان الداخلي والخارجي للزاوية $\widehat{BAC}$ المستقيم (BC) في A_1 و A_2 بالترتيب. لتكن M مركز الدائرة Γ التي قطرها $[A_1A_2]$، و D نقطة من الدائرة Γ مختلفة عن A_1 و A_2. أثبت أنّ المستقيم (MD) يمسّ الدائرة المارة برؤوس المثلّث BCD.

المسألة الثانية

نتأمّل مثلّثاً ABC. لتكن M منتصف $[BC]$ و H نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث ABC. وأخيراً لتكن P المسقط القائم للنقطة H على (AM). أثبت أنّ $4AM \cdot PM = (BC)^2$.

المسألة الثالثة

لتكن x و y و z ثلاثة أعداد حقيقيّة، تُحقّق المساواة $3(x^4+y^4+z^4+1)=4(x^3+y^3+z^3)$.
احسب قيمة المقدار $x+y+z$.

المسألة الرابعة

أوجد جميع التوابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ التي تُحقّق، أياً كان العددان الحقيقيان x و y من $[0,1]$، المتراجحة $(\mathcal{I})$ التالية : $|x-y|^2 \le \left|f(x)-f(y)\right| \le |x-y|$.

المسألة الخامسة

ليكن m عدداً صحيحاً. نفترض وجود عددين صحيحين موجبين x و y يُحقّقان

$$x^2+y^2+1=mxy$$

أثبت أنّ $m=3$. (إرشاد : ماذا تقول عن حل (x,y) للمعادلة السابقة فيه x أصغر ما يمكن ؟)

المسألة السادسة

كتب تلميذ الأعداد $\{1,2,3,\ldots,2011\}$ على السبورة، ثُم بدأ يلعب اللعبة التالية : يختار في كلّ مرّة عددين x و y مكتوبين على السبّورة، ثُم يمحوهما ويكتب بدلاً منهما عدداً واحداً هو $|x-y|$. ويستمرّ في ذلك حتّى يبقى على السبورة عددٌ واحدٌ نسميّه ناتج اللعبة.

① أثبت أن ناتج اللعبة هو دوماً عددٌ زوجي.

② ليكن k عدداً ما من المجموعة $\{0,1,2,\ldots,1005\}$. بيّن أنّه يمكن للتلميذ أن يلعب بحيث يكون العدد $2k$ هو ناتج اللعبة.