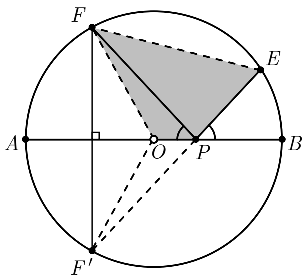
NATIONAL COMMISSION FOR
THE SYRIAN SCIENCE OLYMPIAD

الهيئة الوطنيّة
للأولمبياد العلمي السوري

تصحيح مسائل اليوم الأول

المسألة الأولى



لتكن $\mathcal{C}$ دائرة مركزها O و $[AB]$ قطر فيها. نختار على $[AB]$ نقطة P مختلفة عن O و A و B. ونختار نقطة E من الدائرة $\mathcal{C}$ مختلفة عن A و B. لتكن F النقطة من نصف الدائرة $\widehat{AEB}$ المعيّنة بالشرط $\angle BPE = \angle APF$. أثبت أنّ النقاط P و O و E و F تقع على دائرة واحدة.

الحل

لتكن F' نظيرة F بالنسبة إلى (AB). إنّ F' تقع على $\mathcal{C}$ لأنّ كل قطر في دائرة هو محور تناظر لها. إنّ (AB) هو محور القطعة $[FF']$. التناظر بالنسبة إلى (AB)، (أو تطابق المثلثين OPF و OPF')، يقتضي أنّ

$$\pi - \angle F'PB = \angle APF' = \angle APF = \angle BPE$$

إذن تقع النقاط E و P و F' على استقامة واحدة. ومن ثَمّ

$$\angle PEF = \angle F'EF = \frac{1}{2}\angle F'OF = \angle AOF$$

فالرباعي $OPEF$ رباعي دائري.

المسألة الثانية

لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_{1006}$ أعداداً حيقيقيّة مجموعها يساوي $(2012)^2$. نفترض أيضاً أنّ

$$\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+3} = \frac{x_3}{x_3+5} = \cdots = \frac{x_{1006}}{x_{1006}+2011}$$

أي تبقى جميع النسب $\dfrac{x_k}{x_k+2k-1}$ متساوية عندما تتحوّل k من 1 إلى 1006. احسب قيمة x_{252}.

الحل

لنرمز بالرمز A إلى القيمة المشتركة لهذه النسب عندها يكون

$$A = \frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+3} = \frac{x_3}{x_3+5} = \cdots = \frac{x_{1006}}{x_{1006}+2011} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{1006}}{x_1+x_2+\cdots+x_{1006}+1+3+\cdots+2011}$$

ولكن نعلم أن مجموع أوّل n عدداً فردياً يساوي n^2، (هذه متتالية حسابية حدها الأول يساوي 1 وأساسها يساوي 2) إذن

$$1+3+\cdots+2011 = (1006)^2$$

ومن جهة أخرى لدينا :

$$x_1+x_2+\cdots+x_{1006} = (2012)^2 = 4(1006)^2$$

إذن $\dfrac{4}{5} = \dfrac{4(1006)^2}{4(1006)^2+(1006)^2} = A$، وهذا يقتضي أن

$$\frac{x_{252}}{x_{252}+503} = \frac{4}{5}$$

ومن ثَمّ $x_{252} = 2012$.

المسألة الثالثة

إذا كان m و n عددان صحيحان يُحقّقان $3m+4n=100$ ، فأوجد أصغر قيمة ممكنة للمقدار m^2+n^2 ؟

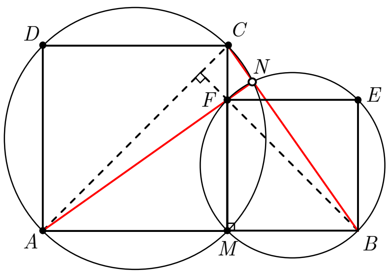
الحل

لنتأمل عددين صحيحين m و n يُحققان $3m+4n=100$ ، عندئذ نلاحظ مباشرة أنّ $3m=4(25-n)$ ، وهذا يقتضي أنّ العدد m مُضاعف للعدد 4 فيمكننا أن نكتب $m=4k$ حيث k هو عددٌ صحيحٌ. عندئذ نستنتج من المساواة $3m=4(25-n)$ أنّ $25-n=3k$ أو $n=25-3k$. إذن

$$\begin{aligned} n^2+m^2 &= (25-3k)^2+16k^2 = 25^2-6\times 25k+25k^2 \\ &= 25(k^2-6k+25) = 25(k-3)^2+25\times 16 \\ &= 25(k-3)^2+400 \end{aligned}$$

فأصغر قيمة يمكن أن يأخذها المقدار m^2+n^2 هي 400 وهي توافق $k=3$ أي $m=12$ و $n=16$.

المسألة الرابعة

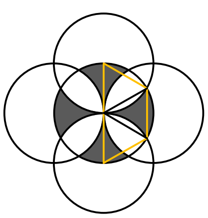


لتكن M نقطة من القطعة المستقيمة $[AB]$ أقرب إلى B . $AMCD$ و $MBEF$ مربّعان بحيث تقع F على القطعة المستقيمة $[MC]$. ولتكن N نقطة تقاطع المستقيمين AF و BC . أثبت أنّ N و M هما نقطتا تقاطع الدائرة المارة برؤوس المربّع $AMCD$ مع الدائرة المارة برؤوس المربع $MBEF$.

الحل

لنتأمّل المثلث ABC . إنّ $[CM]$ ارتفاع فيه، وكذلك $(FB)\perp(AC)$ لأنّ $\angle FBA=\angle CAB=45^\circ$. إذن F هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC ، ومن ثَمّ $(AF)\perp(BC)$. إذن $\angle FNB=\angle ANC=90^\circ$. هذا يبرهن أن الرباعيين $MBNF$ و $AMNC$ دائريان، والنقطتان M و N هما نقطتا تقاطع الدائرة المارة برؤوس المربّع $AMCD$ مع الدائرة المارة برؤوس المربع $MBEF$.

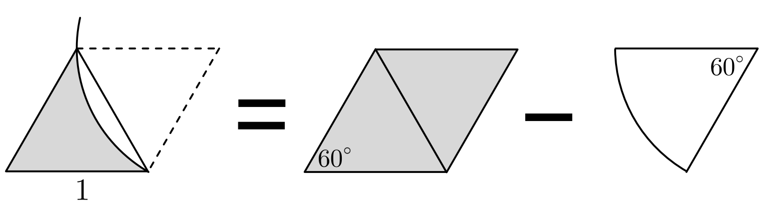
المسألة الخامسة



احسب مساحة الجزء المظلّل في الشكل المجاور، علماً أنّ الدوائر المرسومة طبوقة ونصف قطر كل منها يساوي 1.

الحل

نلاحظ أن الجزء المضلّل مكوّن من أربع قطع طبوقة. مساحة القطعة الواحدة تُحسب كما يلي :



إذن مساحة القطعة الواحدة تساوي $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، ومساحة الجزء المظلّل $2\sqrt{3}-\dfrac{2\pi}{3}$.