الهيئة الوطنيّة للأولمبياد العلمي السوري

NATIONAL COMMISSION FOR THE SYRIAN SCIENCE OLYMPIAD

تصحيح مسائل اليوم الثاني

المسألة الأولى

ليكن a و b جذري المعادلة من الدرجة الثانية $x^2+px+1=0$، وكذلك ليكن c و d جذري المعادلة المُشابهة $x^2+qx+1=0$، احسب بدلالة p و q وبأبسط صيغة، قيمة المقدار $D=(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)$.

الحل

c و d هما جذرا المعادلة $x^2+qx+1=0$ إذن $(x-c)(x-d)=x^2+qx+1$ وذلك أياً كانت x. وعليه

$$D=(a^2+qa+1)(b^2+qb+1)$$

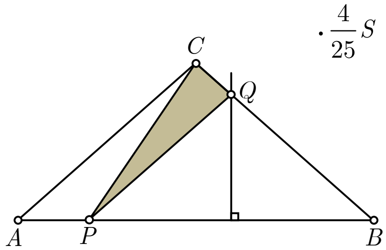
ولكن $a^2+1=-pa$ و $b^2+1=-pb$ إذن

$$D=(qa-pa)(qb-pb)=(q-p)^2ab=(q-p)^2$$

لأنّ $ab=1$.

المسألة الثانية

ليكن ABC مثلثاً مساحته تساوي S. نأخذ على الضلع $[AB]$ نقطة P تُحقّق $\frac{AP}{PB}=\frac{1}{4}$. نفترض أنّ محور القطعة المستقيمة $[PB]$ يقطع الضلع $[CB]$ في Q، وأنّ مساحة المثلث PQC تساوي $\frac{4}{25}S$.



❶ أثبت أنّ مساحة المثلث PQB تساوي $\frac{16}{25}S$.

❷ أثبت أنّ $\frac{BQ}{BC}=\frac{4}{5}$.

❸ أثبت أنّ $AC=BC$.

الحل

❶ نلاحظ أولاً أنّ $\frac{1}{5}=\frac{AP}{AB}=\frac{\mathcal{A}(APC)}{\mathcal{A}(ABC)}$، إذن $\mathcal{A}(APC)=\frac{1}{5}S$. وعليه

$$\mathcal{A}(PQB)=\mathcal{A}(ABC)-\mathcal{A}(APC)-\mathcal{A}(CPQ)=S-\frac{S}{5}-\frac{4S}{25}=\frac{16}{25}S$$

❷ وكذلك

$$\frac{BQ}{BC}=\frac{\mathcal{A}(PBQ)}{\mathcal{A}(PBC)}=\left(\frac{16}{25}S\right)\Big/\left(\frac{16}{25}S+\frac{4}{25}S\right)=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$$

❸ لما كان $\frac{BP}{BA}=\frac{4}{5}=\frac{BQ}{BC}$، استنتجنا أنّ $(PQ)\parallel(AC)$ استناداً إلى عكس مبرهنة تالس. والمثلثان PBQ و ABC متشابهان، ولكن $QP=QB$ لأنّ Q تقع على محور القطعة $[PB]$ إذن $[CA]=[CB]$.

المسألة الثالثة

نتأمّل المجموعة $S = \{1,2,3,\dots,n\}$ أي مجموعة الأعداد الطبيعية الواقعة بين 1 و n. نحذف عدداً k من المجموعة S، ثُمّ نحسب المتوسط الحسابي لبقية العناصر فنجده $\frac{163}{4}$. فما هو العدد المحذوف k؟

الحل

المتوسط الحسابي M للمجموعة $S\setminus\{k\}$ هو

$$M = \frac{(1+2+\cdots+n)-k}{n-1} = \frac{n(n-1)}{2(n-1)} + \frac{n-k}{n-1} = \frac{n}{2} + \frac{n-k}{n-1}$$

ولما كانت $1 \le k \le n$ استنتجنا أنّ $0 \le n-k \le n-1$ ومن ثمّ $0 \le \frac{n-k}{n-1} \le 1$، إذن

$$\frac{n}{2} \le M \le \frac{n}{2} + 1$$

وهذا يقتضي أنّ $2M - 2 \le n \le 2M$، ولكن $M = 163/4$، إذن $79.5 \le n \le 81.5$، وهذا يبرهن أن $n \in \{80, 81\}$.

- في حالة $n = 80$، يكون لدينا $\frac{163}{4} = 40 + \frac{80-k}{79}$، أو $4(80-k) = 3 \times 79$ وهذا مستحيل لأنّ 3×79 ليس من مُضاعفات العدد 4.
- في حالة $n = 81$، يكون لدينا $\frac{163}{4} = \frac{81}{2} + \frac{81-k}{80}$، أو $k = 61$.

إذن $n = 81$، والعدد المحذوف هو $k = 61$.

المسألة الرابعة

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين تماماً يُحققان $a + b = ab$.

1. أثبت أنّ $ab \ge 4$.
2. أثبت كذلك أنّ $\frac{a}{b^2+4} + \frac{b}{a^2+4} \ge \frac{1}{2}$.

الحل

1. نلاحظ أنّ $a = (a-1)b$، إذن

$$a(ab-4) = a^2b - 4a = a^2b - 4(a-1)b = b(a^2 - 4a + 4) = b(a-2)^2 \ge 0$$

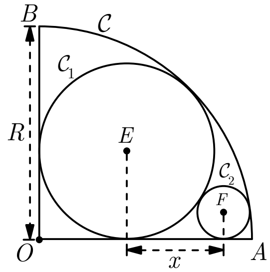
ولأنّ $a > 0$ استنتجنا أنّ $ab - 4 \ge 0$.

2. نستفيد من $ab \ge 4$ لنكتب

$$\begin{aligned}\frac{a}{b^2+4} + \frac{b}{a^2+4} &\ge \frac{a}{b^2+ab} + \frac{b}{a^2+ab}\\ &= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\frac{1}{a+b} = \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\\ &= \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2(a+b)^2}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{(a-b)^2}{2(a+b)^2} \ge \frac{1}{2}\end{aligned}$$

وهي المتراجحة المنشودة.

المسألة الخامسة



في الشكل المجاور ربع دائرة $\mathcal{C}$ مركزها O ويحدّها نصفا قطريها المتعامدين $[OA]$ و $[OB]$. $\mathcal{C}_1 = C(E,1)$ هي دائرة نصف قطرها يساوي 1، تمس داخلاً الدائرة $\mathcal{C}$ وتمس في الوقت نفسه $[OA]$ و $[OB]$. لتكن $\mathcal{C}_2 = C(F,r)$ الدائرة التي تمس في آن واحد كلاً من الدائرة $\mathcal{C}$ والدائرة $\mathcal{C}_1$ و $[OA]$. نهدف في هذه المسألة إلى تعيين قيمة r، أي نصف قطر الدائرة $\mathcal{C}_2$.

❶ أوجد عددين طبيعيين a و b يُحقّقان $(a+b\sqrt{2})^2 = 6+4\sqrt{2}$.

❷ استفد من ❶ وحلّ المعادلة من الدرجة الثانية : $\left(3+\sqrt{2}\right)X^2 + 4X - 4(1+\sqrt{2}) = 0$.

❸ ليكن R نصف قطر الدائرة $\mathcal{C}$. ولنرمز بالرمز x إلى المسافة بين مسقطي النقطتين E و F على $[OA]$.

(a) احسب قيمة R.

(b) أثبت أنّ $x^2 = 4r$.

(c) أثبت أنّ x هو حلٌّ لمعادلة من الدرجة الثانية، وعيّن قيمة x.

(d) احسب قيمة r. يُطلب إعطاء النتيجة بصيغة من الشكل $\dfrac{a+b\sqrt{2}}{c}$ حيث a و b و c هي أعداد طبيعية.

❹ برهن أنّ $r < \dfrac{3}{10}$.

❺ أوجد عدداً طبيعياً M يُحقّق $\dfrac{3}{10} - r < \dfrac{1}{M}$. كلّما كان M كبيراً كانت نتيجتك أفضل.

الحل

❶ لنفترض وجود عددين طبيعيين a و b يُحقّقان المطلوب. بالتربيع نجد $a^2+2b^2+2ab\sqrt{2} = 6+4\sqrt{2}$، المطلوب إذن إيجاد عددين طبيعيين a و b يُحقّقان

$$a^2+2b^2 = 6 \quad \text{و} \quad ab = 2$$

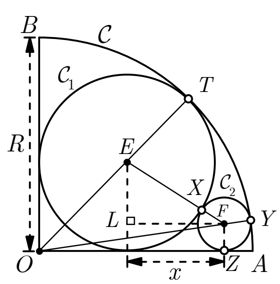
ولكنّ من السهل تعيين قواسم العدد 2، إذن $(a,b) \in \{(1,2),(2,1)\}$. ومن المعادلة الأولى نستنتج أنّ $(a,b) = (2,1)$ هو الحل المطلوب.

❷ نلاحظ أنّ مميز المعادلة $\left(3+\sqrt{2}\right)X^2 + 4X - 4(1+\sqrt{2}) = 0$ هو

$$\Delta = 16 + 16(1+\sqrt{2})(3+\sqrt{2}) = 16\left(6+4\sqrt{2}\right) = 16(2+\sqrt{2})^2$$

إذن $\sqrt{\Delta} = 4(2+\sqrt{2})$، وجذرا المعادلة هما

$$x_1 = \frac{-4-4(2+\sqrt{2})}{2(3+\sqrt{2})} = -2,$$
$$x_2 = 2\frac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = 2\frac{(1+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}{7} = \frac{2+4\sqrt{2}}{7}$$



❸ لنسمِّ نقاط التماس : $\{T\} = \mathcal{C}\cap\mathcal{C}_1$ و $\{Y\} = \mathcal{C}\cap\mathcal{C}_2$ و $\{X\} = \mathcal{C}_1\cap\mathcal{C}_2$.

(a) النقاط O و E و T تقع على استقامة واحدة. ولأنّ (OE) ينصف الزاوية $\angle AOB$ استنتجنا أنّ $\angle AOE = 45°$ ومن ثَمّ $R = OT = OE + ET = \dfrac{1}{\cos(45°)} + 1 = 1+\sqrt{2}$.

(b) النقاط F و X و E تقع على استقامة واحدة. ولدينا في المثلث القائم ELF ما يلي $EF = r+1$ و $EL = 1-r$ و $LF = x$ إذن $x^2 = (r+1)^2 - (1-r)^2 = 4r$.

(c) في المثلث القائم OFZ، لدينا $OZ = 1+x$ و $OF = OY - FY = R - r$ و $FZ = r$. إذن

$$(R-r)^2 = r^2 + (1+x)^2$$

وهذا يُكافئ $0 = 2x^2+4Rr+4x+2(1-R^2)$. ولكن $4r=x^2$ ، إذن

$$(2+R)x^2+4x-2(R^2-1)=0$$

فإذا تذكرنا أنّ $R=1+\sqrt{2}$ استنتجنا أنّ

$$(3+\sqrt{2})x^2+4x-4(1+\sqrt{2})=0$$

وهي نفسها المعادلة التي حللناها في ❷ ، ولها حل موجب وحيد هو $\frac{2+4\sqrt{2}}{7}$ إذن $x=\frac{2+4\sqrt{2}}{7}$.

(d) وجدنا أنّ

$$r=\frac{x^2}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4(1+2\sqrt{2})^2}{49}=\frac{9+4\sqrt{2}}{49}$$

❹ نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\frac{3}{10}-r&=\frac{3}{10}-\frac{9+4\sqrt{2}}{49}=\frac{147-90-40\sqrt{2}}{490}=\frac{57-40\sqrt{2}}{490}\\&=\frac{57^2-3200}{490(57+40\sqrt{2})}=\frac{49}{490(57+40\sqrt{2})}=\frac{1}{10(57+40\sqrt{2})}\end{aligned}$$

إذن

$$\frac{3}{10}-r=\frac{1}{10(57+40\sqrt{2})}>0$$

❺ لماكان $\sqrt{2}>1.4$ استنتجنا أنّ $10(57+40\sqrt{2})>10(57+56)=1130$ ، ومن ثَمّ

$$\frac{3}{10}-r=\frac{1}{10(57+40\sqrt{2})}<\frac{1}{1130}$$

إذن يمكن أن نختار $M=1130$ في الحقيقة

$$\frac{1}{1136}<\frac{1}{10(57+40\sqrt{2})}<\frac{1}{1135}$$

وأكبر قيمة ممكنة للعدد M هي 1135 .