National Commission For The Syrian Science Olympiad

الهيئة الوطنيّة للأولمبياد العلمي السوري

الأولمبياد الوطني للرياضيات 2012

تاريخ 16 كانون الثاني 2012

اليوم الثاني

- مدّة الاختبار أربع ساعات
- يضم الاختبار خمس مسائل، لكل منها عشر درجات.
- يُمنع استعمال الآلات الحاسبة.
- يمنع إدخال أجهزة الهاتف الجوال إلى قاعد الامتحان.

المسألة الأولى

ليكن a و b جذري المعادلة من الدرجة الثانية $x^2 + px + 1 = 0$، وكذلك ليكن c و d جذري المعادلة المُشابهة $x^2 + qx + 1 = 0$، احسب بدلالة p و q وبأبسط صيغة، قيمة المقدار $D = (a-c)(a-d)(b-c)(b-d)$.

المسألة الثانية

ليكن ABC مثلثاً مساحته تساوي S. نأخذ على الضلع $[AB]$ نقطة P تُحقّق $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{4}$. نفترض أنّ محور القطعة المستقيمة $[PB]$ يقطع الضلع $[CB]$ في Q، وأنّ مساحة المثلث PQC تساوي $\frac{4}{25}S$.

1. أثبت أنّ مساحة المثلث PQB تساوي $\frac{16}{25}S$.
2. أثبت أنّ $\frac{BQ}{BC} = \frac{4}{5}$.
3. أثبت أنّ $AC = BC$.

المسألة الثالثة

نتأمّل المجموعة $S = \{1,2,3,\ldots,n\}$ أي مجموعة الأعداد الطبيعية الواقعة بين 1 و n. نحذف عدداً k من المجموعة S، ثُمّ نحسب المتوسط الحسابي لبقية العناصر فنجده $\frac{163}{4}$. فما هو العدد المحذوف k ؟

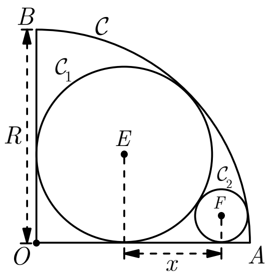
المسألة الرابعة

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين تماماً يُحققان $a+b=ab$.

❶ أثبت أنّ $ab \geq 4$.

❷ أثبت كذلك أنّ $\frac{1}{2} \leq \frac{a}{b^2+4}+\frac{b}{a^2+4}$.

المسألة الخامسة



في الشكل المجاور ربع دائرة $\mathcal{C}$ مركزها O ويحدّها نصفا قطريها المتعامدين $[OA]$ و $[OB]$. $\mathcal{C}_1 = C(E,1)$ هي دائرة نصف قطرها يساوي 1، تمس داخلاً الدائرة $\mathcal{C}$ وتمس في الوقت نفسه $[OA]$ و $[OB]$. لتكن $\mathcal{C}_2 = C(F,r)$ الدائرة التي تمس في آن واحد كلاً من الدائرة $\mathcal{C}$ والدائرة $\mathcal{C}_1$ و $[OA]$. نهدف في هذه المسألة إلى تعيين قيمة r، أي نصف قطر الدائرة $\mathcal{C}_2$.

❶ أوجد عددين طبيعيين a و b يُحقّقان $(a+b\sqrt{2})^2 = 6+4\sqrt{2}$.

❷ استفد من ❶ وحلّ المعادلة من الدرجة الثانية : $\left(3+\sqrt{2}\right)X^2+4X-4(1+\sqrt{2})=0$.

❸ ليكن R نصف قطر الدائرة $\mathcal{C}$. ولنرمز بالرمز x إلى المسافة بين مسقطي النقطتين E و F على $[OA]$.

(a) احسب قيمة R.

(b) أثبت أنّ $x^2 = 4r$.

(c) أثبت أنّ x هو حلٌّ لمعادلة من الدرجة الثانية، وعيّن قيمة x.

(d) احسب قيمة r. يُطلب إعطاء النتيجة بصيغة من الشكل $\frac{a+b\sqrt{2}}{c}$ حيث a و b و c هي أعداد طبيعية.

❹ برهن أنّ $r < \frac{3}{10}$.

❺ أوجد عدداً طبيعياً M يُحقّق $\frac{3}{10}-r<\frac{1}{M}$. كلّما كان M كبيراً كانت نتيجتك أفضل.