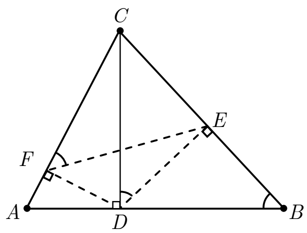
NATIONAL COMMISSION FOR THE SYRIAN SCIENCE OLYMPIAD

الهيئة الوطنيّة للأولمبياد العلمي السوري

تصحيح المسائل

المسألة الأولى



ABC مثلث حاد الزوايا، النقطة D المرتسم القائم للنقطة C على الضلع AB، نأخذ النقطتين F و E المرتسمين القائمين للنقطة D على الضلعين AC و BC بالترتيب. أثبت أن النقاط A و B و E و F تقع على دائرة واحدة.

الحل

الرباعي $ECFD$ دائري لأنّ $\angle DEC = \angle DFC = \frac{\pi}{2}$، ومنه $\angle CFE = \angle CDE = \frac{\pi}{2} - \angle EDB = \angle EBD$. فالرباعي $ABEF$ رباعي دائري.

المسألة الثانية

أوجد جميع الأعداد الأولية p و q التي يكون عندها العدد $2^2 + p^2 + q^2$ عدداً أولياً.

الحل

- إذا كان p و q فرديين كان المقدار $2^2 + p^2 + q^2$ زوجياً وأكبر تماماً من 2 فهو ليس أولي. إذن أحد العددين p أو q عددٌ أولي زوجي، فيمكن أن نفترض مثلاً أنّ $q = 2$.
- إذا كان $p > 3$ كان باقي قسمة p^2 على 3 مساوياً 1، ومن ثَمّ كان $2^2 + p^2 + q^2 = 8 + p^2$ مضاعفاً للعدد 3 وأكبرتماماً منه، أي لم يكن أولياً وهذا تناقض.
- إذن يجب أن يكون $p = 3$. وفعلاً في هذه الحالة يكون $2^2 + p^2 + q^2 = 17$، وهو عددٌ أولي.

الحل إذن هو $\{p, q\} = \{2, 3\}$.

المسألة الثالثة

عيّن العدد الحقيقي m إذا علمت أنّ للمعادلة $X^4 - 2(2m+1)X^2 + 9m^2 = 0$ أربعة جذور حقيقيّة، وأنّ هذه الجذور تكوّن متتالية حسابيّة.

الحل

- نلاحظ أنّه إذا كان x_0 جذراً للمعادلة كان $-x_0$ جذراً لها أيضاً. وعليه إذا كان a أصغر الجذور الموجبة لهذه المعادلة، كان $-a$ أكبر جذورها السالبة وكان أساس المتتالية الحسابيّة مساوياً المسافة بين هذين الجذرين أي $a - (-a) = 2a$. وحدود هذه المتتالية الحسابيّة هي $\{-3a, -a, a, 3a\}$.
- نستنتج إذن أنّ :

$$X^4 - 2(2m+1)X^2 + 9m^2 = (X^2 - a^2)(X^2 - 9a^2) = X^4 - 10a^2X^2 + 9a^4 ،$$

ومنه $m^2 = a^4 = \left(\frac{2m+1}{5}\right)^2$، وهذا يبرهن أنّ

$$m \in \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{7}\right\} .$$

المسألة الرابعة

أوجد جميع الطرائق لتوضيع الأعداد $1,2,3,\ldots,16$ داخل المربعات أدناه، بحيث يظهر كل واحد من هذه الأعداد مرة واحدة، ويكون مجموع كل عددين متجاورين مربعاً كاملاً.

$$\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}$$

الحل

في الحقيقة المربعات الكاملة التي يمكن أن نحصل عليها هي $2^2,3^2,4^2,5^2$.

- نحصل على 4 من $\{1,3\}$.
- نحصل على 9 من $\{1,8\}$ و $\{2,7\}$ و $\{3,6\}$ و $\{4,5\}$.
- نحصل على 16 من $\{1,15\}$ و $\{2,14\}$ و $\{3,13\}$ و $\{4,12\}$ و $\{5,11\}$ و $\{6,10\}$ و $\{7,9\}$.
- ونحصل على 25 من $\{9,16\}$ و $\{10,15\}$ و $\{11,14\}$ و $\{12,13\}$.

نلاحظ أنّ العدد 16 لا يظهر إلا مرّة واحدة مجموعاً مع العدد 9، وكذلك أنّ العدد 8 لا يظهر إلا مرة واحدة مجموعاً مع العدد 1. إذن يحتل العددان 8 المربعين الطرفيين. يمكن مثلاً أن تبدأ السلسلة بالعدد 16 وتنتهي بالعدد 8. وعندها يحتل العدد 9 المربع المجاور للعدد 16 وكذلك يحتل العدد 1 المربع المجاور للعدد 8.

$$\boxed{8}-\boxed{1}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{9}-\boxed{16}$$

هذا يقتضي أن يُجاور العددُ 7 العددَ 9. وأن يُجاور العددُ 2 العددَ 7. وأن يُجاور العددُ 14 العددَ 2. وأن يُجاور العددُ 11 العددَ 14. وأن يُجاور العددُ 5 العددَ 11. وأن يُجاور العددُ 4 العددَ 5. وأن يُجاور العددُ 12 العددَ 4. وأن يُجاور العددُ 13 العددَ 12. وأن يُجاور العددُ 3 العددَ 13.

$$\boxed{8}-\boxed{1}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{}-\boxed{3}-\boxed{13}-\boxed{12}-\boxed{4}-\boxed{5}-\boxed{11}-\boxed{14}-\boxed{2}-\boxed{7}-\boxed{9}-\boxed{16}$$

لا يمكن أن يُجاور الواحد العددَ 3 فلابُد أن يجاورَ العددُ 3 العدد 6. وهذا يقتضي أن يُجاور العددُ 6 العددَ 10. وأخيراً أن يحتلّ العدد 15 المربع الأخير:

$$\boxed{8}-\boxed{1}-\boxed{15}-\boxed{10}-\boxed{6}-\boxed{3}-\boxed{13}-\boxed{12}-\boxed{4}-\boxed{5}-\boxed{11}-\boxed{14}-\boxed{2}-\boxed{7}-\boxed{9}-\boxed{16}$$

وهناك بالطبع الحل المناظر :

$$\boxed{16}-\boxed{9}-\boxed{7}-\boxed{2}-\boxed{14}-\boxed{11}-\boxed{5}-\boxed{4}-\boxed{12}-\boxed{13}-\boxed{3}-\boxed{6}-\boxed{10}-\boxed{15}-\boxed{1}-\boxed{8}$$

وهما حلّا المسألة.

المسألة الخامسة

أوجد قيمة العدد الصحيح الموجب a كي يوجد عشرة أعداد صحيحة x تُحقّق المتراجحة $6x^2-(16a+7)x+(2a+1)(5a+2)<0$.

الحل

نلاحظ أنّ : $6x^2-(16a+7)x+(2a+1)(5a+2)=(2x-(2a+1))(3x-(5a+2))$ ، إذن تتحقّق المتراجحة

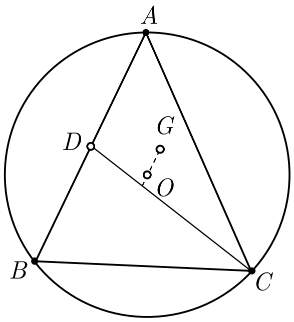
$$6x^2-(16a+7)x+(2a+1)(5a+2)<0$$

إذا وفقط إذا كان

$$x\in\left]a+\frac{1}{2},\frac{5a+2}{3}\right[$$

أصغر عدد صحيح في هذا المجال هو $a+1$، فكي يوجد فيه تماماً عشرة أعداد صحيحة وجب أن ينتمي إلى هذا المجال العدد $a+10$، وألاّ ينتمي إليه العدد $a+11$. أي $a+11\le\frac{5a+2}{3}<a+10$ وهذا يكافئ $33\ge 2a+2>30$ أو $14<a\le 15.5$ ومنه $a=15$.

المسألة السادسة



ABC مثلّث. D منتصف $[AB]$، و G هو مركز ثقل المثلث ADC ، و O هو مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC . أثبت أن الشرط اللازم والكافي ليكون (OG) عمودياً على (CD) هو أن يكون $AB = AC$.

الحل

في الحقيقة

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$
$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$$

وإذا لاحظنا أنّ $OA = OB = OC = R$ ، حيث R هو نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث، وجدنا بعد الإصلاح

$$3\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CB}$$

إذن

$$(OG) \perp (CD) \Leftrightarrow (OA) \perp (CB)$$

ولكنّ الشرط $(OA) \perp (CB)$ يُكافئ انتماء A إلى محور $[CB]$ أي أن يكون $AC = AB$.