الجمهورية العربية السورية

هيئة التميز والابداع

إدارة الأولمبياد العلمي

Syrian Arab Republic

Commission for

Distinction and Creativity

Department of Scientific Olympiad

الأولمبياد العلمي السوري

للعام الدراسي 2017 - 2018

الاختبارات المركزية على مستوى القطر

رياضيات

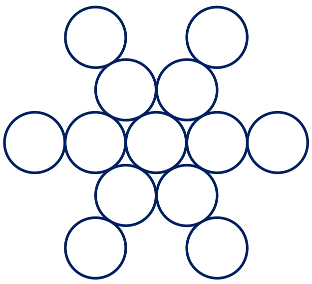
الاختبار الأوّل

المدة ثلاث ساعات

مسألة 1.

عيّن كلّ الثنائيّات الصحيحة الموجبة (x, y) التي تُحقّق $1 + 22x + 20y = xy$.

مسألة 2.



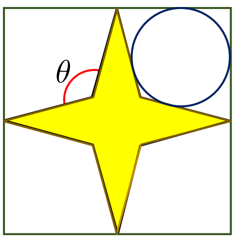
تكتب الأعداد الطبيعية المتتالية من 1 الى 13 في دوائر نُدْفَة الثلج المبينة جانباً دون تكرار. نفترض أنّ مجموع الأعداد السبعة الموجودة في الوسط يساوي مجموع أية خمسة أعداد موجودة في دوائر مراكزها على استقامة واحدة. عيّن، مبرهناً إجابتك، أصغر قيمة يمكن أن يأخذها هذا المجموع إذا كان هذا الأمر ممكناً.

مسألة 3.

جِد كلّ الثنائيّات الحقيقيّة (x, y) التي تحقّق المعادلتين الآتيتين معاً

$$(x-1)(y^2+6) = y(x^2+1)$$
$$(y-1)(x^2+6) = x(y^2+1)$$

مسألة 4.



في الشكل المجاور $ABCD$ مربّع طول ضلعه يساوي 2 أنشأنا في مركزه نجمة رباعيّة الشكل رؤوسها منتصفات أضلاع المربّع. وهي متناظرة بالنسبة إلى أقطار المربع والمستقيمات التي تصل بين منتصفي كلّ ضلعين متقابلين في المربع. نفترض أنّ $\theta = 120°$.

① بيّن أنّ مساحة النجمة تكتب بصيغة من الشكل $\dfrac{a - b\sqrt{3}}{c}$ حيث a و b و c هي أعداد صحيحة، وأعط أصغر قيمة للمجموع $a + b + c$.

② نرسم دائرة تمسّ ضلعين متجاورين للمربّع وضلعين متجاورين من النجمة، كما في الشكل. احسب نصف قطر هذه الدائرة.

اللجنة العلمية المركزية–لجنة الرياضيات

مسألة 1.

عيّن كلّ الثنائيّات الصحيحة الموجبة (x,y) التي تُحقّق $1+22x+20y=xy$.

الحل

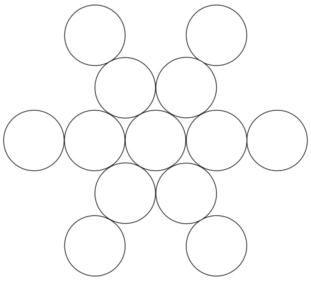
نكتب المعادلة بالصيغة المُكافئة $(x-20)(y-22)=1+\left(21^2-1\right)=21^2=3^2\times 7^2$ إذن مجموعة الحلول (x,y) الصحيحة هي $\left\{\left(20+d,22+3^2\times 7^2/d\right):d\mid 3^2\times 7^2\right\}$، ولكننا نريد الحلول الموجبة، فإذا كان $d=-t<0$ وجب أن يكون $20>t$ و $\frac{3^2\times 7^2}{t}>22$، أي $20>t$ و $20+\frac{1}{22}=\frac{441}{22}>t$، وهذا تناقض. إذن نحصل على الحلول الموجبة فقط في حالة كون $d>0$. أي :

$$d\in\{1,3,7,9,21,49,63,147,441\}$$

ومن ثمّ فإنّ مجموعة الحلول المطلوبة هي:

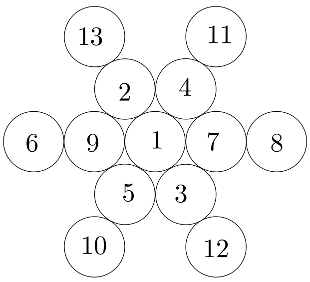
$$\{(21,463),(23,169),(27,85),(29,71),(41,43),(69,31),(83,29),(167,25),(461,23)\}$$

مسألة 2.



تكتب الأعداد الطبيعية المتتالية من 1 الى 13 في دوائر ندفة الثلج المبينة جانباً دون تكرار. نفترض أن مجموع الأعداد السبعة الموجودة في الوسط يساوي مجموع أية خمسة أعداد موجودة في دوائرة مراكزها على استقامة واحدة. عيّن، مبرهناً إجابتك، أصغر قيمة يمكن أن يأخذها هذا المجموع إذا كان هذا الأمر ممكناً.

الحل



ليكن S المجموع المشترك لكل من الأعداد السبعة في الوسط ولكل خمسة أعداد على استقامة واحدة. وليكن c العدد المكتوب في المركز، عندئذ $3S-2c=1+2+3+\cdots+13=91$ ومنه $3S=91+2c\geq 91+2=93$ أي $S\geq 31$. والشكل المجاور يبيّن أنّ هذا الحلّ ممكنٌ. فأصغر قيمة هي 31.

مسألة 3

جِد كلّ الثنائيّات الحقيقيّة (x,y) التي تحقّق المعادلتين الآتيتين معاً

$$\begin{aligned}(x-1)(y^2+6)&=y(x^2+1)\\(y-1)(x^2+6)&=x(y^2+1)\end{aligned}$$

الحل

بجمع المعادلتين والإصلاح نجد

$$x^2+y^2-5(x+y)+12=0 \qquad (1)$$

وبطرح الثانية من الأولى ومن ثمّ إصلاح المعادلة الناتجة نجد

$$(x-y)(x+y-2xy+7)=0 \qquad (2)$$

وهنا نناقش حالتين:

- إمّا أن يكون $x=y$. وفي هذه الحالة نجد حلّين هما $(x,y)=(2,2)$ و $(x,y)=(3,3)$.

- أو $x+y-2xy+7=0$. وهنا نضع $x+y=s$ و $xy=p$، فنحصل مع (1) على جملة المعادلتين

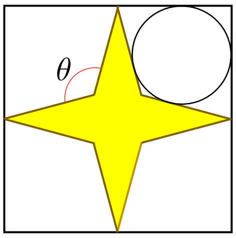
$$s-2p+7=0 \;\text{و}\; s^2-5s-2p+12=0$$

بالطرح نجد $s^2-6s+5=0$ ومنه $(s,p)=(1,4)$ أو $(s,p)=(5,6)$.

- في الحالة $(s,p)=(1,4)$، العددان x و y هما جذرا المعادلة $t^2-t+4=0$ ولكن ليس لهذه المعادلة جذور حقيقيّة.
- في الحالة $(s,p)=(5,6)$، العددان x و y هما جذرا المعادلة $t^2-5t+6=0$، أي 2 و 3. ومنه الحلّان $(x,y)=(2,3)$ أو $(x,y)=(3,2)$.

فمجموعة الحلول هي $\{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$.

مسألة. 4

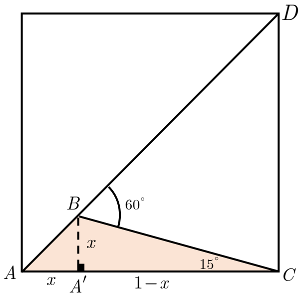


في الشكل المجاور $ABCD$ مربّع طول ضلعه يساوي 2 أنشأنا في مركزه نجمة رباعيّة الشكل رؤوسها منتصفات أضلاع المربّع. وهي متناظرة بالنسبة إلى أقطار المربع والمستقيمات التي تصل بين منتصفي كل ضلعين متقابلين في المربع. نفترض أنّ $\theta=120^\circ$.

① بيّن أنّ مساحة النجمة تكتب بصيغة من الشكل $\dfrac{a-b\sqrt{3}}{c}$ حيث a و b و c هي أعداد صحيحة، وأعط أصغر قيمة للمجموع $a+b+c$.

② نرسم دائرة تمسّ ضلعين متجاورين للمربّع وضلعين متجاورين من النجمة، كما في الشكل. احسب نصف قطر هذه الدائرة.

الحل

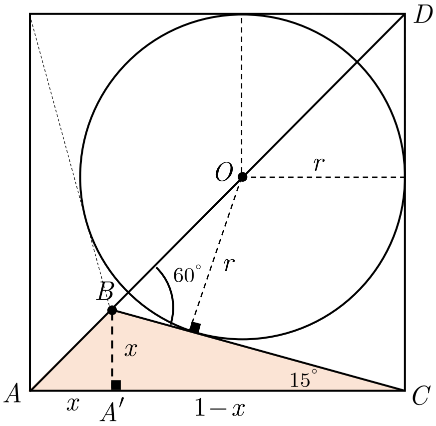


① لتكن S مساحة النجمة. إنّ $S=8S'$ حيث S' هي مساحة المثلّث ABC المبيّن في الشكل المجاور. لدينا $\widehat{A}=45^\circ$ و $\widehat{CBD}=60^\circ$، و $AC=1$. إذن

$$\frac{x}{1-x}=\tan 15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$x=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

ومنه $S=8\dfrac{x\times 1}{2}=\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}$، والأعداد $(2,3,6)$ أولية فيما بينها إذن $a+b+c=11$.



② ليكن O مركز الدائرة وهو يقع على BD بسبب التناظر، وليكن r نصف قطرها. نلاحظ أنّ $OD=r\sqrt{2}$ و $OB=\dfrac{2}{\sqrt{3}}r$ و $AB=x\sqrt{2}$ إذن

$$\sqrt{2}=AD=\frac{3-\sqrt{3}}{6}\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}r+\sqrt{2}r$$

وعليه

$$r=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\frac{3+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$