Syrian Arab Republic
Commission for
Distinction and Creativity
Department of Scientific Olympiad

الجمهورية العربية السورية

هيئة التميز والابداع

إدارة الأولمبياد العلمي

الأولمبياد العلمي السوري

للعام الدراسي 2017 - 2018

الاختبار المعياري

رياضيات

الاختبار الأوّل

المدة ثلاث ساعات

مسألة. 1

جِد مجموعة الأعداد الأوّلية p التي يكون عندها $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ مربّعاً كاملاً.

مسألة. 2

عيّن مجموعة القيم الحقيقية التي يمكن أن يأخذها العدد a إذا علمت أنّ الخاصّة الآتية محقّقة:

«يوجد تابع $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ يحقّق $\forall x \geq 0, \forall y \geq 0, \quad f(x+y^2) \geq af(x)+y$»

مسألة. 3

قياسات الزوايا A و B و C في المثلّث ABC متناسبة مع الأعداد 1 و 2 و 4 بالترتيب. النقاط A' و B' و C' هي نقاط تقاطع المنصفات الداخلية لهذه الزوايا مع الأضلاع المقابلة. أثبت أنّ المثلّث $A'B'C'$ متساوي الساقين.

مسألة. 1

جِد مجموعة الأعداد الأوّلية p التي يكون عندها $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ مربّعاً كاملاً.

الحل

تمهيد 1. إذا كان n و m عددين طبيعيين موجبين تماماً يحققان $2^n+1=m^2$ كان $n=3$.

الإثبات. نستنتج من $2^n=(m-1)(m+1)$ أنّ $m-1=2^k$ و $m+1=2^\ell$ حيث $k+\ell=n$ و $k<\ell$. وعليه نرى أنّ $2^k(2^{\ell-k}-1)=2$. إذن $\ell=k+1$ و $k=1$. ومنه $n=3$.

تمهيد 2. إذا كان n و m عددين طبيعيين موجبين تماماً يحققان $2^n-1=m^2$ كان $n=1$.

الإثبات. إذا افترضنا أنّ $n\geq 2$ استنتجنا مما سبق أنّ -1 مربّع بالقياس 4 وهذا مستحيل.

لنأت إلى مسألتنا، ولنفترض أنّ p عدد أولي يجعل $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ مربعاً كاملاً. في حالة $p=2$ لدينا $\dfrac{1}{2}=\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$، فالعدد $p=2$ ليس حلاً للمسألة.

إذن $p=2n+1$ حيث n عدد طبيعي موجب تماماً. نلاحظ أنّ العددين 2^n-1 و 2^n+1 عددان فرديان أوليان فيما بينهما، ونستنتج من مبرهنة Fermat أنّ p يقسم $(2^{2n}-1)=(2^n-1)(2^n+1)$، فإمّا أن يكون $p\mid(2^n-1)$ أو $p\mid(2^n+1)$.

- في حالة $p\mid(2^n-1)$، لدينا $k^2=(2^n+1)\times\dfrac{2^n-1}{p}$، ولأنّ $\gcd\left(2^n+1,\dfrac{2^n-1}{p}\right)=1$ استنتجنا أنّ العدد 2^n+1 يجب أن يكون مربعاً كاملاً، والتمهيد 1 يقتضي في هذه الحالة أن يكون $n=3$ أو $p=7$. وبالعكس، نرى مباشرة أنّ هذا حلّ للمسألة لأنّ $\dfrac{2^{7-1}-1}{7}=9$ في هذه الحالة.
- في حالة $p\mid(2^n+1)$، لدينا $k^2=(2^n-1)\times\dfrac{2^n+1}{p}$، ولأنّ $\gcd\left(2^n-1,\dfrac{2^n+1}{p}\right)=1$ استنتجنا أنّ العدد 2^n-1 يجب أن يكون مربعاً كاملاً، والتمهيد 2 يقتضي في هذه الحالة أن يكون $n=1$ أو $p=3$. وبالعكس، نرى مباشرة أنّ هذا حلّ للمسألة لأنّ $\dfrac{2^{3-1}-1}{3}=1$ في هذه الحالة.

إذن مجموعة حلول المسألة تقتصر على $\{3,7\}$.

مسألة. 2

عيّن مجموعة القيم الحقيقية التي يمكن أن يأخذها العدد a إذا علمت أنّ الخاصّة الآتية محقّقة:

$$\text{«يوجد تابع } f:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R} \text{ يحقّق } f(x+y^2)\geq af(x)+y\quad \forall x\geq 0,\forall y\geq 0\text{»}$$

الحل

لتكن D مجموعة الأعداد الحقيقية a التي تحقّق الخاصة المعطاة. سنبرهن أنّ $D=\,]-\infty,1[$.

1. ليكن $a>1$، ولنفترض أنّه يوجد تابع f يحقّق الشرط المعطى. عندئذ باختيار $y=0$ نستنتج أنّ $(a-1)f(x)\leq 0$ مهما كانت قيمة x، فقيم التابع f سالبة، وعلى الخصوص يكون لدينا $y+af(0)\leq f(y^2)\leq 0$ مهما كانت قيمة $y\geq 0$، وعلى الخصوص هذا يؤدي إلى تناقض عند اختيار $y=1-af(0)$. إذن $a>1\Rightarrow a\notin D$.

2. ليكن $a=-b\le 0$، عندئذ نتأمّل التابع $g:[0,+\infty[\to\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{x}$ فنرى أنّه في حالة عددين موجبين x و y لدينا

$$g(x+y^2)=\sqrt{x+y^2}\ge y\ge y-b\sqrt{x}=g(x)+y$$

ومنه $a\le 0\Rightarrow a\in D$.

3. ليكن $a\in\,]0,1[$، عندئذ نتأمّل التابع $h:[0,+\infty[\to\mathbb{R}, h(x)=\lambda\sqrt{x}$ حيث λ هو عدد حقيقي موجب سنعينه لاحقاً، بحيث يحقّق التابع h المتراجحة المعطاة أي

$$\forall x\ge 0,\forall y\ge 0,\quad h(x+y^2)\ge ah(x)+y$$

أي

$$\forall x\ge 0,\forall y\ge 0,\quad \lambda\sqrt{x+y^2}\ge a\lambda\sqrt{x}+y$$

ولأنّ طرفي المتراجحة موجبان هذا يكافئ

$$\forall x\ge 0,\forall y\ge 0,\quad \lambda^2(x+y^2)\ge a^2\lambda^2x+2a\lambda\sqrt{x}y+y^2$$

أو

$$\forall x\ge 0,\forall y\ge 0,\quad (\lambda^2-1)y^2-2a\lambda\sqrt{x}y+(1-a^2)\lambda^2x\ge 0$$

بالقسمة على y واختيار y كبيرة بقدر كاف نرى أنّ تحقّق هذه المتراجحة يتطلب منا اختيار $\lambda>1$. وعندئذ يمكن أن نكتبها بالشكل

$$\forall x\ge 0,\forall y\ge 0,\quad (\lambda^2-1)\Big(y-\frac{a\lambda}{\lambda^2-1}\sqrt{x}\Big)^2+\Big(\lambda^2(1-a^2)-1\Big)\frac{\lambda^2x}{\lambda^2-1}\ge 0$$

فإذا اخترنا $\lambda=\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}$ وهو أكبر تماماً من الواحد، صارت المتراجحة المطلوبة مُكافئة للشرط المحقّق وضوحاً

$$\forall x\ge 0,\forall y\ge 0,\quad (\lambda^2-1)\Big(y-\frac{a\lambda}{\lambda^2-1}\sqrt{x}\Big)^2\ge 0$$

إذن في حالة $a\in\,]0,1[$، التابع $h:[0,+\infty[\to\mathbb{R}, h(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1-a^2}}$ يُحقّق الشرط المعطى ومن ثمّ $a\in D$.

4. بقيت مناقشة حالة $a=1$. لنفترض على سبيل الجدل أنّه يوجد تابع $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ يحقّق

$$\forall x\ge 0,\forall y\ge 0,\quad f(x+y^2)\ge f(x)+y$$

باختيار $x=ny^2$ حيث n عدد صحيح أكبر أو يساوي 0 أنّ

$$\forall y\ge 0,\quad f((n+1)y^2)-f(ny^2)\ge y$$

ومن ثَمّ، في حالة $y\ge 0$، و $m\in\mathbb{N}$ لدينا

$$f(my^2)-f(0)=\sum_{n=0}^{m-1}\Big(f((n+1)y^2)-f(ny^2)\Big)\ge my$$

وعلى الخصوص، في حالة $y=\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ يكون لدينا $f(1)-f(0)\ge\sqrt{m}$ مهما كان m من $\mathbb{N}$، وهذا تناقض. إذن $a=1\notin D$. النتيجة النهائية هي إذن $D=\,]-\infty,1[$.

مسألة. 3

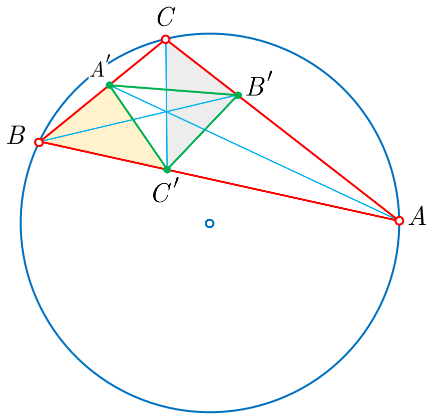
قياسات الزوايا A و B و C في المثلّث ABC متناسبة مع الأعداد 1 و 2 و 4 بالترتيب. النقاط A' و B' و C' هي نقاط تقاطع المنصفات الداخلية لهذه الزوايا مع الأضلاع المقابلة. أثبت أنّ المثلث $A'B'C'$ متساوي الساقين.

الحل

دون الإقلال من العمومية، يمكن أن نفترض أنّ المثلّث مرسوم في الدائرة المثلّثية. عندئذ، استناداً إلى علاقة الجيب يكون لدينا

$$c = 2\sin 4\theta = 2\sin 3\theta \text{ و } b = 2\sin 2\theta \text{ و } a = 2\sin\theta$$

حيث $\theta = \dfrac{\pi}{7}$.



استناداً إلى خواص المنصفات لدينا

$$BA' = \frac{ac}{b+c}, \quad CB' = \frac{ba}{c+a}$$

ولكن

$$\begin{aligned} b+c &= 2\big(\sin(3\theta)+\sin(2\theta)\big) = 2\big(\sin(4\theta)+\sin(2\theta)\big) \\ &= 4\sin(3\theta)\cos\theta = 2c\cos\theta \\ c+a &= 2\big(\sin(3\theta)+\sin\theta\big) = 4\sin(2\theta)\cos\theta = 2b\cos\theta \end{aligned}$$

إذن

$$\frac{c+a}{b} = 2\cos\theta = \frac{b+c}{c}$$

وهذا يبرهن أنّ $BA' = CB'$. ومن جهة أخرى $BC'C$ متساوي الساقين لأنّ $\widehat{C'BC} = \widehat{BCC'} = 2\theta$، ومنه لدينا أيضاً $BC' = C'C$، وأخيراً $\widehat{C'BC} = \widehat{C'CB'} = 2\theta$. إذن المثلثان $\Delta C'BA'$ و $\Delta C'CB'$ طبوقان، وهذا يقتضي أن يكون $C'A' = C'B'$، وهي النتيجة المرجوّة.