Syrian Arab Republic
Commission for
Distinction and Creativity
Department of Scientific Olympiad

الجمهورية العربية السورية
هيئة التميز والابداع
إدارة الأولمبياد العلمي

الأولمبياد العلمي السوري
للعام الدراسي 2017 - 2018
الاختبارات المركزية على مستوى القطر
رياضيات
الاختبار الثاني

المدة ثلاث ساعات

مسألة 1.

ليكن n عدداً طبيعياً موجباً تماماً، ولتكن $S_n = \{0,1,\dots,n\}$. نرمز بالرمز A_n إلى مجموعة الثلاثيّات (a,b,c) من عناصر S_n التي تُحقّق المساواة $|a-b| = |c-b|$.

① احسب عدد عناصر A_4.

② احسب عدد عناصر A_5.

③ واحسب عدد عناصر A_n بدلالة n في الحالة العامة.

مسألة 2.

حلّ في مجموعة الأعداد الحقيقية جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 7 \\ y^2 + yz + z^2 &= 37 \\ z^2 + zx + x^2 &= 67 \end{aligned}$$

مسألة 3.

عيّن جميع الأعداد الحقيقية a التي تحقّق المتراجحة $|ax^2 - 3x - 4| \le 5 - 3x$ تحقّق وذلك مهما كانت x من $[-1,1]$.

مسألة 4.

نتأمّل مربعاً $ABCD$، لتكن E نقطة من نصف المستقيم $[CB)$، و $CEFG$ مربّع آخر يقع خارج $ABCD$. يتقاطع المستقيمان BG و DE في P. برهن أنّ CP عمودي على AF.

مسألة. 1

ليكن n عدداً طبيعياً موجباً تماماً، ولتكن $S_n = \{0,1,\ldots,n\}$. نرمز بالرمز A_n إلى مجموعة الثلاثيّات (a,b,c) من عناصر S_n التي تُحقّق المساواة $|a-b| = |c-b|$.

① احسب عدد عناصر A_4.

② احسب عدد عناصر A_5.

③ واحسب عدد عناصر A_n بدلالة n في الحالة العامة.

الحل

$\operatorname{card} A_4 = 33$ و $\operatorname{card} A_5 = 48$. لنأتِ مباشرة إلى ③.

- كل الثلاثيّات من الشكل (a,b,a) تُحقّق المساواة المعطاة، عدد هذه الثلاثيّات $(n+1)^2$.
- في حالة $a \neq c$ المساواة المعطاة تعني أنّ b تقع في منتصف المسافة بين a و c أي $2b = a+c$ فإمّا أن يكون a و c زوجيّان معاً أو فرديّان معاً. فالثلاثيّات المطلوب حساب عددها نوعان:
  - تلك من النمط $(2k-1, k+\ell-1, 2\ell-1)$ حيث $k \neq \ell$ و k و ℓ من $\left\{1,\ldots,\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\right\}$ عدد هذه الثلاثيات يساوي $\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor-1\right)$.
  - وتلك من النمط $(2k, k+\ell, 2\ell)$ حيث $k \neq \ell$ و k و ℓ من $\left\{0,\ldots,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$ عدد هذه الثلاثيات يساوي $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1\right)$.

إذن عدد عناصر A_n يساوي

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(A_n) &= (n+1)^2 + \left\lfloor\tfrac{n+1}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\tfrac{n+1}{2}\right\rfloor-1\right) + \left\lfloor\tfrac{n}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\tfrac{n}{2}\right\rfloor+1\right)\\
&= \begin{cases} (n+1)^2 + n^2/2 & : n \in 2\mathbb{N} \\ (n+1)^2 + (n^2-1)/2 & : n \notin 2\mathbb{N} \end{cases}\\
&= (n+1)^2 + \left\lfloor\frac{n^2}{2}\right\rfloor
\end{aligned}$$

وعلى الخصوص $\operatorname{card} A_4 = 33$ و $\operatorname{card} A_5 = 48$.

مسألة. 2

حلّ في مجموعة الأعداد الحقيقية جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned}
x^2 + xy + y^2 &= 7\\
y^2 + yz + z^2 &= 37\\
z^2 + zx + x^2 &= 67
\end{aligned}$$

الحل

نضرب الأولى بالمقدار $(x-y)$ والثانية بالمقدار $(y-z)$ والثالثة بالمقدار $(z-x)$ ثمّ نجمع المعادلات الثلاث الناتجة فنجد

$$7(x-y) + 37(y-z) + 67(z-x) = 0$$

ومن ثمّ

$$y + z = 2x$$

بتربيع هذه العلاقة والاستفادة من المعادلة الثانية نجد

$$yz = 4x^2 - 37$$

ثُمّ بطرح الأولى من الأخيرة نجد $z^2 - y^2 + x(z-y) = 60$ أو $(z-y)(z+y+x) = 60$،

إذن

$$z-y=\frac{20}{x}$$

وعليه

$$z=x+\frac{10}{x}, y=x-\frac{10}{x}$$

أي $yz=x^2-\frac{100}{x^2}$. وعليه لا بدّ أن يكون $x^2-\frac{100}{x^2}=4x^2-37$ ومنه $3x^4-37x^2+100=0$ أو

$$(x^2-4)(3x^2-25)=0$$

إذن

$$x\in\left\{2,-2,\frac{5}{\sqrt{3}},-\frac{5}{\sqrt{3}}\right\}$$

ومجموعة الحلول (x,y,z) هي

$$\left\{(2,-3,7),(-2,3,-7),\left(\frac{5}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{11}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{5}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{11}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

مسألة 3.

عيّن جميع الأعداد الحقيقية a التي تحقّق المتراجحة $\left|ax^2-3x-4\right|\le 5-3x$ وذلك مهما كانت x من $[-1,1]$.

الحل

المتراجحة في حالة $x=1$ تقتضي $a-7\le 2$ ومنه $a\le 9$. وفي حالة $x=\frac{1}{3}$ نقتضي $\frac{a}{9}-5\ge -4$ ومنه $a\ge 9$. إذن القيمة الوحيدة التي يمكن أن تحقّق المطلوب هي $a=9$. وبالعكس، في حالة $x\in[-1,1]$ لدينا $5-3x>0$ و

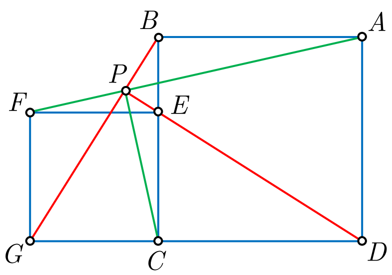
$$\begin{aligned} 9x^2-3x-4 &\le 5-3x && \Leftrightarrow 9(1-x^2)\ge 0\\ 9x^2-3x-4 &\ge -(5-3x) && \Leftrightarrow (3x-1)^2\ge 0 \end{aligned}$$

إذن $\left|9x^2-3x-4\right|\le 5-3x$ مهما كانت x من $[-1,1]$، والمتراجحة محقّقة في حالة $a=9$ فهي الحل الوحيد للمسألة.

مسألة 4.

نتأمّل مربعاً $ABCD$، لتكن E نقطة من نصف المستقيم $[CB)$، و $CEFG$ مربّع آخر يقع خارج $ABCD$. يتقاطع المستقيمان BG و DE في P . برهن أنّ CP عمودي على AF .

الحل



ليكن $\mathcal{R}$ الدوران ربع دورة حول C الذي ينقل D إلى B . عندها $\mathcal{R}(E)=G$، ومن ثمّ صورة المستقيم (DE) وفق $\mathcal{R}$ هي المستقيم (BG) . إذن $DE\perp BG$.

نستنتج من $\widehat{GFE}=\widehat{GPE}=90°$ أنّ P تنتمي إلى الدائرة المرسومة على المثلث EFG، أي الدائرة التي تمر برؤوس المربع $EFGC$، وبوجه خاص $\widehat{CPF}=\widehat{CEF}=90°$.

ونستنتج من $\widehat{DPB}=\widehat{DCB}=90°$ أنّ P تنتمي إلى الدائرة المرسومة على المثلث DCB، أي الدائرة التي تمر برؤوس المربع $ABCD$، وبوجه خاص $\widehat{CPA}=\widehat{CBA}=90°$. إذن تقع النقاط F و P و A على استقامة واحدة و $CP\perp AF$.