Syrian Arab Republic
Commission for
Distinction and Creativity
Department of Scientific Olympiad

الجمهورية العربية السورية
هيئة التميز والابداع
إدارة الأولمبياد العلمي

الأولمبياد العلمي السوري
للعام الدراسي 2017 - 2018
الاختبار المعياري

رياضيات

الاختبار الثاني

المدة ثلاث ساعات

مسألة. 1

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة مكوّنة من n عنصراً. ولتكن $\mathcal{S}(A)$ مجموعة مؤلّفة من مجموعات جزئية من A تحقّق الخواص الآتية:

- عدد عناصر أية مجموعة جزئية D من $\mathcal{S}(A)$ أصغر أو يساوي $n-1$.
- كل عنصر من A ينتمي إلى أربع وفقط أربع مجموعات جزئية مختلفة من $\mathcal{S}(A)$.
- كلّ مجموعة جزئية مؤلفة من عنصرين من عناصر A محتواة في مجموعة جزئية واحدة وفقط واحدة من $\mathcal{S}(A)$.

ما أكبر قيمة يمكن أن يأخذها العدد n؟

مسألة. 2

ليكن $ABCD$ رباعياً فيه $DA=DC$ و $\widehat{DAB}=\widehat{ABC}<90^\circ$. ولتكن M منتصف BC، يتقاطع المستقيمان DM و AB في E. أثبت أنّ $\widehat{DAC}=\widehat{BEC}$.

مسألة. 1

لتكن $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ مجموعة مكوّنة من n عنصراً. ولنفترض وجود مجموعة $\mathcal{S}(A)$ مؤلّفة من مجموعات جزئية من A تحقّق الخواص الآتية:

- عدد عناصر أيّة مجموعة جزئية D من $\mathcal{S}(A)$ أصغر أو يساوي $n-1$.
- كل عنصر من A ينتمي إلى أربع وفقط أربع مجموعات جزئية مختلفة من $\mathcal{S}(A)$.
- كلّ مجموعة جزئية مؤلفة من عنصرين من عناصر A محتواة في مجموعة جزئية واحدة وفقط واحدة من $\mathcal{S}(A)$.

ما أكبر قيمة يمكن أن يبلغها العدد n ؟

الحل

ادعاء 1. عدد عناصر أيّة مجموعة جزئية D من $\mathcal{S}(A)$ أصغر أو يساوي 4.

في الحقيقة، لنفترض على سبيل الجدل وجود مجموعة جزئية $D=\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ من $\mathcal{S}(A)$ عدد عناصرها k أكبر أو يساوي 5. لأنّ عدد عناصر D أصغر تماماً من عدد عناصر A فيوجد $a\in A\setminus D$. ومهما كان $j\in\{1,\ldots,k\}$ فيوجد مجموعة وحيدة D_j من $\mathcal{S}(A)$ تحقّق $\{a,x_j\}\subset D_j$.

التطبيق $j\mapsto D_j$ متباينٌ لأنّه إذا افترضنا وجود $j\neq i$ يحقّق $D_j=D_i$ استنتجنا من كون $\{x_i,x_j\}$ محتواة في كلّ من D_i و D أنّ D يجب أن تساوي D_i ومن ثمّ يجب أن تنتمي a إلى D وهذا تناقض.

إذن العنصر a محتوى في كل من المجموعات $(D_j)_{1\leq j\leq k}$ وعددها k أكبر من 4 وهذا يناقض الفرض الثاني، ويثبت صحة الادعاء.

ادعاء 2. $n\leq 13$.

في حالة مجموعة جزئية D من $\mathcal{S}(A)$ نعرّف على A التابع المميّز للمجموعة D بالصيغة

$$\mathcal{X}_D:A\to\{0,1\},\mathcal{X}_D(x)=\begin{cases}1 & : & x\in D,\\ 0 & : & x\notin D.\end{cases}$$

ثُمّ نعرّف التابع

$$f:A\times A\to\mathbb{R},f(x,y)=\sum_{D\in\mathcal{S}(A)}\mathcal{X}_D(x)\mathcal{X}_D(y)$$

نلاحظ ما يأتي:

- استناداً إلى الفرض الثاني لدينا $f(x,x)=4$ أياً كان x من A.
- واستناداً إلى الفرض الثالث لدينا $f(x,y)=1$ في حالة $x\neq y$ من A.

إذن

$$4n=\sum_{x\in A}f(x,x)=\sum_{x\in A}\left(\sum_{D\in\mathcal{S}(A)}\mathcal{X}_D(x)\right)=\sum_{D\in\mathcal{S}(A)}\sum_{x\in A}\mathcal{X}_D(x)=\sum_{D\in\mathcal{S}(A)}\operatorname{card}(D)$$

و

$$\begin{aligned}4n+n(n-1)&=\sum_{x,y\in A}f(x,y)=\sum_{x,y\in A}\left(\sum_{D\in\mathcal{S}(A)}\mathcal{X}_D(x)\mathcal{X}_D(y)\right)\\&=\sum_{D\in\mathcal{S}(A)}\left(\sum_{x,y\in A}\mathcal{X}_D(x)\mathcal{X}_D(y)\right)=\sum_{D\in\mathcal{S}(A)}\left(\operatorname{card}(D)\right)^2\end{aligned}$$

فإذا تذكّرنا أنّ $\operatorname{card}(D) \leq 4$ مهما كانت D من $\mathcal{S}(A)$ استنتجنا مما سبق أنّ

$$n^2 + 3n = \sum_{D\in\mathcal{S}(A)} \left(\operatorname{card}(D)\right)^2 \leq 4 \sum_{D\in\mathcal{S}(A)} \operatorname{card}(D) = 16n$$

إذن $n \leq 13$.

ادعاء 3. أكبر قيمة تأخذها n هي فعلاً 13.

في حالة $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{13}\}$ يمكن أن نعرّف $\mathcal{S}(A) = \{D_j, 1 \leq j \leq 13\}$ حيث

$$\begin{array}{llll}
D_1 = \{a_1,a_2,a_3,a_4\}, & D_2 = \{a_1,a_5,a_6,a_7\}, & D_3 = \{a_1,a_8,a_9,a_{10}\}, & D_4 = \{a_1,a_{11},a_{12},a_{13}\},\\
D_5 = \{a_2,a_5,a_8,a_{11}\}, & D_6 = \{a_2,a_6,a_9,a_{12}\}, & D_7 = \{a_2,a_7,a_{10},a_{13}\}, & \\
D_8 = \{a_3,a_5,a_{10},a_{12}\}, & D_9 = \{a_3,a_6,a_8,a_{13}\}, & D_{10} = \{a_3,a_7,a_9,a_{11}\}, & \\
D_{11} = \{a_4,a_5,a_9,a_{13}\}, & D_{12} = \{a_4,a_6,a_{10},a_{11}\}, & D_{13} = \{a_4,a_7,a_8,a_{12}\} &
\end{array}$$

والمجموعة $\mathcal{S}(A)$ تحقّق الشرط المعطى.

مسألة 2.

ليكن $ABCD$ رباعياً فيه $DA = DC$ و $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} < 90^\circ$. ولتكن M منتصف BC، يتقاطع المستقيمان DM و AB في E. أثبت أنّ $\widehat{DAC} = \widehat{BEC}$.

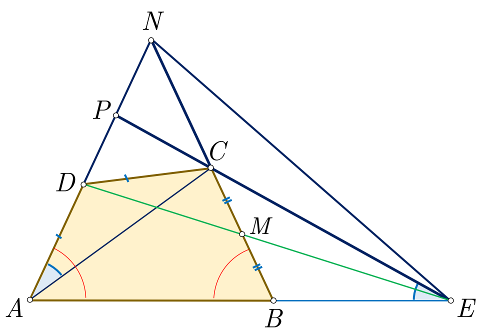
الحل

لنذكّر بمبرهنة **مينلاوس**:

ليكن ABC مثلثاً، ولتكن $A' \in (BC)$ و $B' \in (CA)$ و $C' \in (AB)$ عندئذ تقع النقاط A' و B' و C' على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كان

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = -1.$$

لنأتِ إلى مسألتنا. لتكن N نقطة تقاطع (AD) و (BC)، ولتكن P نقطة تقاطع (AD) و (EC).



- في المثلث ΔDMN:

لدينا $P \in (ND)$ و $C \in (MN)$ و $E \in (DM)$، والنقاط P و C و E تقع على استقامة واحدة. إذن استناداً إلى مبرهنة مينلاوس لدينا:

$$\frac{\overline{NP}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{DE}}{\overline{EM}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{CN}} = -1$$

- في المثلث ΔDMN:

لدينا $A \in (ND)$ و $B \in (MN)$ و $E \in (DM)$، والنقاط A و B و E تقع على استقامة واحدة. إذن استناداً إلى مبرهنة مينلاوس لدينا:

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{DE}}{\overline{EM}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{BN}} = -1$$

ولكن $NB = NA$ و $MB = MC$ و $AD = DC$ إذن

$$\frac{1}{DC} = \frac{EM}{ED} \cdot \frac{1}{MB} \quad \text{و} \quad \frac{NP}{PD} = \frac{EM}{ED} \cdot \frac{CN}{MB}$$

ومنه

$$\frac{NP}{PD} = \frac{CN}{DC}$$

فالمستقيم CP هو منصّف للزاوية $\widehat{DCN}$.

الآن لدينا

$$\begin{aligned}\widehat{ACP} &= \frac{1}{2}\Big(\widehat{CDN} + \widehat{DCN}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\pi - \widehat{ANB}\Big) = \widehat{DAB} \\ &= \widehat{ABC} = \widehat{BEC} + \widehat{BCE} = \widehat{BEC} + \widehat{PCN} \\ &= \widehat{BEC} + \widehat{DCP}\end{aligned}$$

أو

$$\widehat{BEC} = \widehat{ACP} - \widehat{DCP} = \widehat{ACD} = \widehat{DAC}$$

وهي النتيجة المرجوّة.