الأولمبياد العلمي السوري
اختبارات انتقاء الفرق الأولمبية العلمية السورية للمشاركات الخارجية 2018
رياضيات

اليوم الأوّل

المدة أربع ساعات

مسألة 1

في حالة عدد طبيعي موجب تماماً m نعرّف المقدارين

$$A_m = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2},$$

$$B_m = 1 + \frac{1}{1^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{m^2(m+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2(k+1)},$$

أثبت أنّ $A_{2018^2} < B_{2017} < A_{2018^2} + \dfrac{1}{2018^2}$.

مسألة 2

عيّن جميع الأعداد الطبيعية الموجبة a و b التي تجعل المقدار $(ab)^2 - 4(a+b)$ مربّعاً كاملاً.

مسألة 3

ليكن $n \geq 2$. ولتكن $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ أعداداً حقيقيّة تُحقّق $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$. في حالة $1 \leq i \leq n$ نعرّف $b_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$، و نفرض أنه في حالة $1 \leq i \leq j \leq n-1$ تتحقّق المتراجحة:

$$b_i(a_{j+1} - a_{i+1}) \geq 0$$

أثبت أن: $\max\limits_{1 \leq m \leq n} |b_m| \leq \max\limits_{1 \leq k \leq n} |a_k|$.

مسألة 4

ليكن ABC مثلثاً معطى، ننشئ على أضلاعه مثلثات XBC و YCA و ZBA، كلٌّ منها مثلث متساوي الساقين قاعدته أحد أضلاع المثلث ABC. ليكن d_A المستقيم المار بالنقطة A عمودياً على YZ، وليكن بالمثل المستقيم d_B المار بالنقطة B عمودياً على ZX، والمستقيم d_C المار بالنقطة C عمودياً على XY. أثبت أن المستقيمات d_A و d_B و d_C تتلاقى في نقطة واحدة.

مسألة. 1

في حالة عدد طبيعي موجب تماماً m نعرّف المقدارين

$$A_m = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2},$$

$$B_m = 1 + \frac{1}{1^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{m^2(m+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2(k+1)},$$

أثبت أنّه مهما كان العدد الطبيعي $n \geq 1$ فلدينا $A_{n^2} < B_{n-1} < A_{n^2} + \frac{1}{n^2}$.

الحل

بملاحظة أنّ $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ نستنتج من ذلك أنّ

$$\frac{1}{k^2(k+1)} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$$

وعليه

$$B_n = 1 + \sum_{1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = A_n + \frac{1}{n+1} \tag{1}$$

وفي حالة $m > n \geq 1$ لدينا

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} < \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k(k-1)}$$

ومنه

$$\sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) < \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

أي

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < A_m - A_n < \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \tag{2}$$

وهذا يعني أنّ المتتالية $\left(A_n + \frac{1}{n+1} \right)_{n \geq 1}$ متزايدة وأنّ المتتالية $\left(A_n + \frac{1}{n} \right)_{n \geq 1}$ متناقصة. إذا استفدنا من (1) استنتجنا أنّ المتتالية $\left(B_n \right)_{n \geq 1}$ متزايدة وهذا أمر واضح، وأنّ المتتالية $\left(B_{n-1} + \frac{1}{n^2} \right)_{n \geq 1}$ متناقصة.

لمّا كان $n^2 > n$ استنتجنا أنّ

$$A_{n^2} + \frac{1}{n^2} = B_{n^2-1} + \frac{1}{n^4} < B_{n-1} + \frac{1}{n^2}$$

ومنه $A_{n^2} < B_{n-1}$، وهي المتراجحة الأولى. وكذلك

$$B_{n-1} = A_{n-1} + \frac{1}{n} < A_{n^2} + \frac{1}{n^2+1} < A_{n^2} + \frac{1}{n^2}$$

وهي المتراجحة الثانية.

مسألة. 2

عيّن جميع الأعداد الطبيعية الموجبة a و b التي تجعل المقدار $(ab)^2-4(a+b)$ مربعاً كاملاً.

الحل

لنلاحظ أنّ

$$(ab-1)^2-((ab)^2-4(a+b))=1-2ab+4(a+b)=9-2(a-2)(b-2)$$
$$(ab-2)^2-((ab)^2-4(a+b))=4-4ab+4(a+b)=8-4(a-1)(b-1)$$

- فإذاكان $(a-2)(b-2)\geq 5$ استنتجنا من الأولى أنّ $(ab-1)^2<(ab)^2-4(a+b)<(ab)^2$ فلا يمكن أن يكون $(ab)^2-4(a+b)$ مربعاً كاملاً.
- وإذاكان $(a-2)(b-2)\leq 4$ و $(a-1)(b-1)>2$ استنتجنا من الأولى والثانية أنّ
$$(ab-2)^2<(ab)^2-4(a+b)<(ab-1)^2$$
فلا يمكن أن يكون $(ab)^2-4(a+b)$ مربعاً كاملاً.
- بقيت إذن حالة $(a-1)(b-1)\leq 2$.
  - إذاكان $a=1$، و $(1\times b)^2-4(1+b)=k^2$ استنتجنا أنّ $(b-2)^2-k^2=8$ أو
$$(b-2-k)(b-2+k)=2^3$$
وهذا يقتضي أنّ $b-2-k=\varepsilon 2^i, b-2+k=\varepsilon 2^{3-i}$ حيث $0\leq i\leq 3$ و $\varepsilon=\pm 1$. إذن
$$k=\varepsilon\frac{2^{3-i}-2^i}{2} \text{ و } b=2+\varepsilon\frac{2^{3-i}+2^i}{2}.$$
ولكنّ b عدد طبيعي موجب تماماً إذن $b=5$. ونتحقّق مباشرة أنّ $(a,b)=(1,5)$ حلّ للمسألة.
  - ونجد بالمثل الحل $(a,b)=(5,1)$.
  - إذاكان $a\geq 2$ و $b\geq 2$ استنتجنا من $(a-1)(b-1)\leq 2$ أنّ $(a,b)\in\{(2,2),(2,3),(3,2)\}$، وتحقّق مباشرة أنّ هذه جميعاً هي أيضاً حلول للمسألة المطروحة.

إذن مجموعة الحلول هي

$$(a,b)\in\{(1,5),(2,2),(2,3),(3,2),(5,1)\}$$

مسألة. 3

ليكن $n\geq 2$. ولتكن $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ أعداداً حقيقيّة تُحقّق $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$. في حالة $1\leq i\leq n$ نعرّف $b_i=a_1+a_2+\cdots+a_i$، و نفرض أنه في حالة $1\leq i\leq j\leq n-1$ تتحقّق المتراجحة:

$$b_i(a_{j+1}-a_{i+1})\geq 0$$

أثبت أنّ: $\max\limits_{1\leq m\leq n}|b_m|\leq\max\limits_{1\leq k\leq n}|a_k|$.

الحل

لنعرّف التابع sgn بالصيغة $\operatorname{sgn}(x)=1$ في حالة $x>0$ و $\operatorname{sgn}(x)=-1$ في حالة $x<0$، و $\operatorname{sgn}(0)=0$.

- لنضع $s_i=\operatorname{sgn}(b_i)$. استناداً إلى الفرض لدينا $s_i(a_j-a_{i+1})\geq 0$ في حالة $j\in\{i+1,\ldots,n\}$ وبجمع هذه المساويات نجد $s_i(-b_i-(n-i)a_{i+1})\geq 0$ لأنّ $b_i=a_1+\cdots+a_i=-(a_{i+1}+\cdots+a_n)$، وهذا يقتضي أنّه في حالة $1\leq i\leq n-1$ لدينا $-|b_i|\geq(n-i)s_ia_{i+1}$ وعلى الخصوص $b_i\neq 0$ يقتضي أن $s_i=\operatorname{sgn}(a_{i+1})$.

- لنضع $\beta = \max_{1\le m\le n}\left|b_m\right|$. إذا كان $\beta = 0$ فلا يوجد ما يجب إثباته. لنفترض أنّ $\beta > 0$، ولنضع

$$k = \min\{i \ge 1 : \left|b_i\right| = \beta\}$$

إذا كان $k = 1$ كان $\beta = \left|b_1\right| = \left|a_1\right| \le \max_{1\le i\le n}\left|a_i\right|$.

إذا كان $k > 1$، فإمّا أن يكون $b_{k-1} = 0$ وعندها $\beta = \left|b_k\right| = \left|a_k\right| \le \max_{1\le i\le n}\left|a_i\right|$، وإما أن يكون $b_{k-1} \ne 0$ وعندها يكون للعددين b_{k-1} و a_k إشارتين متعاكستين ومجموعهما يساوي b_k ومن ثمّ $\left|b_k\right| \le \max\left(\left|a_k\right|,\left|b_{k-1}\right|\right)$، ولكن بحسب اختيارنا للعدد k لدينا $\left|b_k\right| > \left|b_{k-1}\right|$، إذن يجب أن يكون $\left|b_k\right| \le \left|a_k\right|$، ومن ثمّ

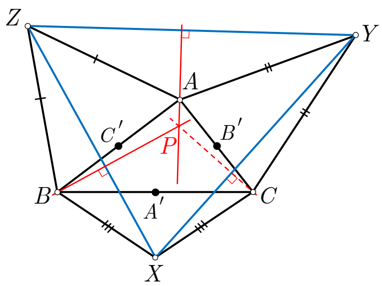
$$\beta = \left|b_k\right| \le \left|a_k\right| \le \max_{1\le i\le n}\left|a_i\right|$$

في هذه الحالة أيضاً.

مسألة. 4

ليكن ABC مثلثاً معطى، ننشئ على أضلاعه مثلثات XBC و YCA و ZBA، كلٌّ منها مثلث متساوي الساقين قاعدته أحد أضلاع المثلث ABC. ليكن d_A المستقيم المار بالنقطة A عمودياً على YZ، وليكن بالمثل المستقيم d_B المار بالنقطة B عمودياً على ZX، والمستقيم d_C المار بالنقطة C عمودياً على XY. أثبت أن المستقيمات d_A و d_B و d_C تتلاقى في نقطة واحدة.

الحل



لتكن A' و B' و C' منتصفات الأضلاع BC و CA و AB بالترتيب. ولنرمز $\vec{u} = \overrightarrow{A'X}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{B'Y}$ و $\vec{w} = \overrightarrow{C'Z}$. ثمّ لنعرّف في حالة نقطة M من المستوي المقدار

$$f(M) = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{ZX} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{XY}$$

نلاحظ ما يأتي

$$\begin{aligned}
f(M) &= \overrightarrow{MA}\cdot\left(-\vec{v} + \overrightarrow{B'C'} + \vec{w}\right) + \overrightarrow{MB}\cdot\left(-\vec{w} + \overrightarrow{C'A'} + \vec{u}\right) + \overrightarrow{MC}\cdot\left(-\vec{u} + \overrightarrow{A'B'} + \vec{v}\right)\\
&= \vec{u}\cdot\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) + \vec{v}\cdot\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\right) + \vec{w}\cdot\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\right) + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MB}\cdot\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MC}\cdot\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right)\\
&= \vec{u}\cdot\overrightarrow{CB} + \vec{v}\cdot\overrightarrow{AC} + \vec{w}\cdot\overrightarrow{BA} = 0
\end{aligned}$$

الآن، إذا عرّفنا $\{P\} = d_A \cap d_B$ كان $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{ZX} = 0$، ولأنّ $f(P) = 0$، استنتجنا أنّ $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{XY} = 0$، أي إنّ $P \in d_C$ أيضاً. فالمستقيمات d_A و d_B و d_C تتلاقى في نقطة واحدة.