Syrian Arab Republic
Commission for
Distinction and Creativity
Department of Scientific Olympiad

الجمهورية العربية السورية
هيئة التميز والابداع
إدارة الأولمبياد العلمي

الأولمبياد العلمي السوري
اختبارات انتقاء الفرق الأولمبية العلمية السورية للمشاركات الخارجية 2018
رياضيات

اليوم الأوّل

المدة أربع ساعات

مسألة 1

في حالة عدد طبيعي موجب تماماً m نعرّف المقدارين

$$A_m = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2},$$

$$B_m = 1 + \frac{1}{1^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{m^2(m+1)} = 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2(k+1)},$$

أثبت أنّ $A_{2018^2} < B_{2017} < A_{2018^2} + \frac{1}{2018^2}$.

مسألة 2

عيّن جميع الأعداد الطبيعية الموجبة a و b التي تجعل المقدار $(ab)^2 - 4(a+b)$ مربّعاً كاملاً.

مسألة 3

ليكن $n \geq 2$. ولتكن $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ أعداداً حقيقيّة تُحقّق $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$. في حالة $1 \leq i \leq n$ نعرّف $b_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$، و نفرض أنه في حالة $1 \leq i \leq j \leq n-1$ تتحقّق المتراجحة:

$$b_i(a_{j+1} - a_{i+1}) \geq 0$$

أثبت أن: $\max_{1 \leq m \leq n} \left|b_m\right| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \left|a_k\right|$.

مسألة 4

ليكن ABC مثلثاً معطى، ننشئ على أضلاعه مثلثات XBC و YCA و ZBA، كلٌّ منها مثلث متساوي الساقين قاعدته أحد أضلاع المثلث ABC. ليكن d_A المستقيم المار بالنقطة A عمودياً على YZ، وليكن بالمثل المستقيم d_B المار بالنقطة B عمودياً على ZX، والمستقيم d_C المار بالنقطة C عمودياً على XY. أثبت أن المستقيمات d_A و d_B و d_C تتلاقى في نقطة واحدة.