Syrian Arab Republic
Commission for
Distinction and Creativity
Department of Scientific Olympiad

الجمهورية العربية السورية
هيئة التميز والابداع
إدارة الأولمبياد العلمي

الأولمبياد العلمي السوري
اختبارات انتقاء الفرق الأولمبية العلمية السورية للمشاركات الخارجية 2018
رياضيات

المدة أربع ساعات اليوم الثاني

مسألة 1

ليكن n و k عددان طبيعيان **أوّليان** فيما بينهما ويحققان $1 < k < n$. نلوّن الأعداد الطبيعية في المجموعة $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ بأحد اللونين الأحمر أو الأزرق مع احترام القواعد الآتية:

① أيّاً كان i من $\mathcal{A}$ كان للعددين i و $n-i$ اللّون ذاته.

② أيّاً كان i من $\mathcal{A} \setminus \{k\}$ كان للعددين i و $|k-i|$ اللون ذاته.

أثبت أنّ لجميع عناصر $\mathcal{A}$ اللون ذاته.

مسألة 2

نقول إنّ العدد الطبيعي n **ظريف** إذا وفقط إذا كان $(2n-5)$ يقسم $3(n!+1)$. احسب جداء ضرب الأعداد الطبيعية الظريفة.

مسألة 3

تقع النقطة F على القاعدة AB لشبه المنحرف $ABCD$، وهي تحقّق $DF = CF$. لتكن E نقطة تقاطع AC و BD، وليكن O_1 مركز الدائرة $\mathcal{C}_1$ المارة برؤوس المثلث AFD و O_2 مركز الدائرة $\mathcal{C}_2$ المارة برؤوس المثلث FBC. أثبت أنّ المستقيمين O_1O_2 و EF متعامدان.

مسألة. 1

ليكن n و k عددان طبيعيان **أوّليان** فيما بينهما ويحققان $1 < k \leq n$. نلوّن الأعداد الطبيعية في المجموعة $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, n-1\}$ بأحد اللونين الأحمر أو الأزرق مع احترام القواعد الآتية:

① أيّاً كان i من $\mathcal{A}$ كان للعددين i و $n-i$ اللّون ذاته.

② أيّاً كان i من $\mathcal{A}\backslash\{k\}$ كان للعددين i و $\left|k-i\right|$ اللّون ذاته.

أثبت أنّ لجميع عناصر $\mathcal{A}$ اللون ذاته.

الحل

لنعرف في حالة m من $\mathcal{A}$ العدد $\varphi(m) = km - n\lfloor km/n \rfloor$ أي باقي قسمة km على n. لاحظ أنّ $\varphi(m) = 0$ يقتضي أنّ $n \mid (km)$ ولكن $\gcd(k,n) = 1$ إذن $n \mid m$ وهذا مستحيل لأنّ $1 \leq m < n$. إذن $0 < \varphi(m) < n$ ومن ثمّ $\varphi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$.

من جهة أخرى φ متباينٌ لأنّ $\varphi(i) = \varphi(j)$ يقتضي أنّ $n \mid k(i-j)$ ومجدداً لأنّ $\gcd(k,n) = 1$ استنتجنا أنّ $n \mid (i-j)$ ولكنّ العدد $i-j$ ينتمي إلى $\{-n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1\}$ والصفر هو المضاعف الوحيد للعدد n في هذه المجموعة. إذن $i-j=0$ أو $i=j$. إذن لقد أثبتنا أنّ $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ تقابلٌ.

ليكن m من $\mathcal{A}$ بحيث $m < n-1$. بملاحظة أنّ

$$0 < \frac{k(m+1)}{n} - \frac{km}{n} < 1$$

نستنتج

$$\left\lfloor \frac{k(m+1)}{n} \right\rfloor = \left\{ \left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor, 1 + \left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor \right\}$$

فهناك حالتان:

- $\left\lfloor \dfrac{k(m+1)}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{km}{n} \right\rfloor$، وهذا يكافئ $(m+1)k - \varphi(m+1) = km - \varphi(m)$، أو
$$\varphi(m) = \varphi(m+1) - k$$
إذن للعددين $\varphi(m+1)$ و $\varphi(m) = \left|k - \varphi(m+1)\right|$ اللّون ذاته حسب الخاصة ②. (لأنّ $\varphi(m+1) \neq k$ وإلّا كان $\varphi(m) = 0$).

- $\left\lfloor \dfrac{k(m+1)}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{km}{n} \right\rfloor + 1$، وهذا يكافئ $k - \varphi(m+1) = n - \varphi(m)$، إذن أيضاً حسب الخاصة ② يكون للعددين $\varphi(m+1)$ و $n - \varphi(m) = \left|k - \varphi(m+1)\right|$ اللّون ذاته. وبالاستفادة من الخاصة ① يكون للعددين $\varphi(m+1)$ و $\varphi(m)$ اللون ذاته في هذه الحالة أيضاً.

لقد أثبتنا أنّه مهما كان m من $\mathcal{A}$ بحيث $m < n-1$ كان للعددين $\varphi(m+1)$ و $\varphi(m)$ اللون نفسه. هذا يتيح لنا أن نبرهن بالتدريج أنّ لجميع الأعداد $\{\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(m)\}$ حيث $m \leq n-1$، اللون نفسه الذي هو لون العدد $\varphi(1) = k$. وبذا يكتمل الإثبات.

مسألة. 2

نقول إنّ العدد الطبيعي n **ظريف** إذا وفقط إذا كان $(2n-5)$ يقسم $3(1+n!)$. احسب جداء ضرب الأعداد الطبيعية الظريفة.

الحل

- لتكن $\mathcal{C}$ مجموعة الأعداد الطبيعية الظريفة.
- في حالة n من المجموعة $\{1,2,3,4\}$ يأخذ المقدار $2n-5$ القيم $\{-3,-1,1,3\}$ وهي جميعها قواسم للعدد 3، إذن هي أعداد ظريفة أي $\{1,2,3,4\}\subset\mathcal{C}$.
- أمّا في حالة $n=5$ فنجد أنّ $5\notin\mathcal{C}$ لأنّ $5\nmid 3\times 11^2$.
- لننظر في حالة $n=6$، هنا $2n-5=7$ و $n!+1=721=7\times 103$ إذن $6\in\mathcal{C}$.
- لنفترض الآن أنّ $n\geq 7$ وأنّ $n\in\mathcal{C}$. ولنعرّف $p=2n-5\geq 9$. سنبرهن أنّ p عددٌ أولي. إنّ $3(1+n!)$ عدد فردي، فإذا كان p قاسماً له وجب أن يكون p عدداً فردياً. ليكن $q\geq 3$ أصغر عدد أولي يقسم p.

❖ إذا كان $q=3$ استنتجنا أنّ $n'=\dfrac{p}{q}=\dfrac{2n-5}{3}<n$ يقسم $1+n!$، ولكن $n'\mid n!$ أيضاً، إذن يجب أن يكون n' قاسماً للواحد، أي يساويه. ومن ثَمّ $n=4$ وهذا **يناقض** افتراضنا. نستنتج إذن أنّ $q\geq 5$، وأنّ $\gcd(p,3)=1$ إذن $p\mid(1+n!)$.

❖ إذا كان $p\neq q$. استنتجنا مُجدداً أنّ $n'=\dfrac{p}{q}\leq\dfrac{2n-5}{5}<n$ يقسم $1+n!$، ولأن $n'\mid n!$ أيضاً وجب أن يكون n' قاسماً للواحد، أي يساويه. ومن ثَمّ $p=q$ وهذا **يناقض** افتراضنا. نستنتج إذن أنّ p عددٌ أولي.

❖ استناداً إلى مبرهنة Wilson لدينا $(p-1)!=-1\bmod p$ أو $(2n-6)!=-1\bmod p$ وفرضاً لدينا $n!=-1 \mod p$ إذن

$$(n+1)(n+2)\cdots(2n-6)=1\bmod p$$

أو $(p-(n-6))(p-(n-5))\cdots(p-1)=1\bmod p$، وهذا يقتضي

$$(n-6)!=(-1)^n\bmod p$$

أو

$$-1=n!=(-1)^n(n-5)\cdots(n-1)n \mod p$$

وأخيراً

$$(n-5)\cdots(n-1)n=(-1)^{n-1} \mod p$$

بضرب الطرفين بالعدد $2^6=64$ نستنتج أنّ

$$(2n-10)(2n-8)\cdots(2n-2)(2n)=64(-1)^{n-1} \mod p$$

أو

$$(p-5)(p-3)(p-1)(p+1)(p+3)(p+5)=64(-1)^{n-1} \mod p$$

وعليه $225-64(-1)^n=0\bmod p$، فإذا كان n فردياً وجب أن يقسم p العدد 289، أي $p=17$، ومن ثَمّ $n=11$. وإذا كان n زوجياً وجب أن يقسم p العدد $161=7\times 23$ ولكن $p\geq 9$ إذن $p=23$ أو $n=14$.

❖ في حالة $n = 11$ لدينا

$$\begin{aligned} 1+11! &\equiv 1+8!(-8)(-7)(-6) \equiv 1-(120)(36)(49)(64) \bmod 17 \\ &\equiv 1-(1)(2)(-3)(-4) \equiv -23 \bmod 17 \end{aligned}$$

إذن $11 \notin \mathcal{C}$.

❖ حالة $n = 14$ لدينا

$$\begin{aligned} 1+14! &\equiv 1+11!(-11)(-10)(-9) \equiv 1-(6!)(56)(121)(100)(81) \bmod 23 \\ &\equiv 1-(7)(10)(6)(8)(12) \equiv 1-(2)(12) \equiv 0 \bmod 23 \end{aligned}$$

إذن $14 \in \mathcal{C}$.

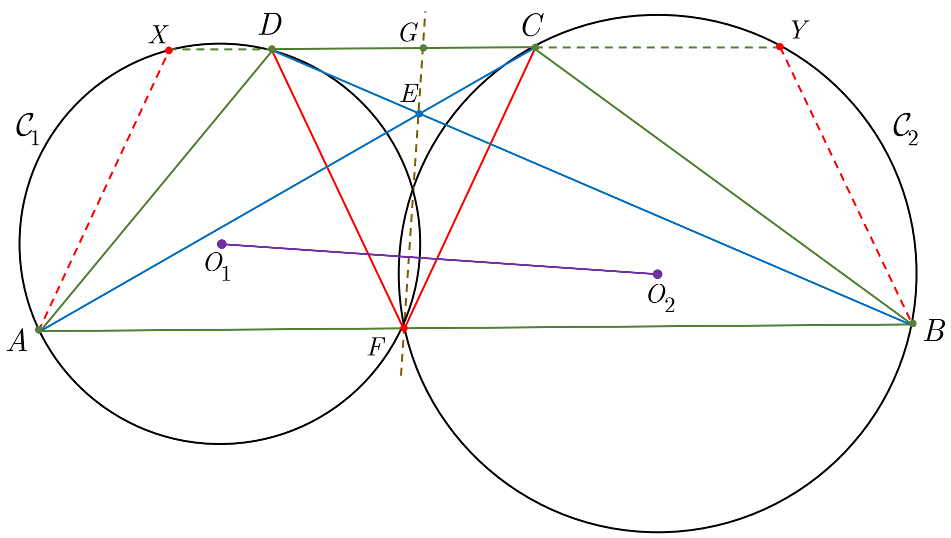
■ وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $\mathcal{C} = \{1,2,3,4,6,14\}$ وجداء ضرب هذه الأعداد يساوي 2016.

مسألة. 3

تقع النقطة F على القاعدة AB لشبه المنحرف $ABCD$، وهي تحقّق $DF = CF$. لتكن E نقطة تقاطع AC و BD، وليكن O_1 مركز الدائرة $\mathcal{C}_1$ المارة برؤوس المثلث AFD و O_2 مركز الدائرة $\mathcal{C}_2$ المارة برؤوس المثلث FBC. أثبت أنّ المستقيمين O_1O_2 و EF متعامدان.

الحل

لتكن G نقطة تقاطع المستقيمين EF و DC، ولتكن X النقطة الثانية التي يقطع فيها المستقيم DC الدائرة $\mathcal{C}_1$، و Y النقطة الثانية التي يقطع فيها المستقيم DC الدائرة $\mathcal{C}_2$.



سنبرهن أنّ قوّة G بالنسبة إلى $\mathcal{C}_1$ تساوي قوة G بالنسبة إلى $\mathcal{C}_2$، وهذا يقتضي عندئذ أنّ EF هو المحور الأساسي للدائرتين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$، فهو إذن عمودي على خط المركزين ويتم إثبات المطلوب.

قوة G بالنسبة إلى $\mathcal{C}_1$ تساوي $P_{\mathcal{C}_1}(G) = GD \cdot GX$، و قوة G بالنسبة إلى $\mathcal{C}_2$ تساوي $P_{\mathcal{C}_2}(G) = GC \cdot GY$.

ادعاء. الرباعي $AFCX$ متوازي الأضلاع.

لأنّ $AF \parallel XC$ فرضاً، و $\angle XAB = \angle FDC = \angle DCF = \angle CFB$ إذن $AX \parallel CF$ برهاناً.

ادعاء. الرباعي $DFBY$ متوازي الأضلاع.

لأنّ $FB \parallel DY$ فرضاً، و $\angle YBA = \angle DCF = \angle CDF = \angle DFA$ إذن $BY \parallel DF$ برهاناً.

من تشابه المثلثين DGE و BFE لدينا $\frac{GE}{FE}=\frac{DG}{FB}$. ومن تشابه المثلثين CGE و AFE لدينا $\frac{GE}{FE}=\frac{CG}{FA}$، إذن

$$\frac{DG}{FB}=\frac{CG}{FA}$$

ومن ناحية أخرى

$$\begin{aligned} GX &= \left|XC-GC\right| = \left|AF-GC\right| = GC\cdot\left|1-\frac{AF}{GC}\right| \\ GY &= \left|YD-GD\right| = \left|BF-GD\right| = GD\cdot\left|1-\frac{BF}{GD}\right| = GD\cdot\left|1-\frac{AF}{GC}\right| \end{aligned}$$

إذن

$$\frac{GX}{GY}=\frac{GC}{GD}$$

أي $GX\cdot GD=GY\cdot GC$، ومنه $P_{\mathcal{C}_1}(G)=P_{\mathcal{C}_2}(G)$، وهذا يقتضي كما رأينا أنّ $O_1O_2 \perp EF$.