تدريب
طلاب الأولمبياد العلمي السوري

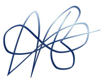
اختصاص رياضيات

مستوى ثان

د. عمران قوبا

2018

المحتوى



التعداد والتحليل التوافقي

مسألة 1 لنفترض أنّه لدينا $n+1$ عدداً جرى اختيارها من بين الأعداد $\{1,2,\ldots,2n\}$. أثبت أنّه يوجد عددين أوّليين فيما بينهما من بين الأعداد المُختارة.

مسألة 2 أرضٌ بشكل مثلّث متساوي الأضلاع، طول ضلعه 20 متراً، نزرع فيها 17 شجرةً. أثبت وجود شجرتين المسافة بينهما أقلّ من خمسة أمتار.

مسألة 3 أثبت أنّه في أيّ حفلٍ يضمّ أكثر من شخص واحدٍ، لا بُدّ من وجود شخصين يُجريان العدد نفسه من المصافحات.

مسألة 4 يتدرّب أستاذٌ في لعبة الشطرنج تحضيراً لبطولة العالم، فيلعبُ دوراً واحداً في اليوم على الأقل، وحتى لا يُرهق نفسه، يلعب أحد عشر دوراً في الأسبوع على الأكثر. أثبت أنّه إذا طالت فترة تدريبه بقدر كافٍ، فتوجد فترة مكوّنة من أيام متتالية، يكون اللاعب قد لعب فيها 21 دوراً.

مسألة 5 افترض أنّه بالإمكان رسم مثّلث داخل مربع طول ضلعه يساوي الواحد، بحيث لا يقع مركز المربّع داخل المثلث. أثبت أنّ طول أحد أضلاع المثلث أقصر من الواحد.

مسألة 6 نتأمّل مجموعة جزئية S من المجموعة $\{1,2,\ldots,100\}$ مؤلفة من 11 عنصراً، أثبت أنّ S تحتوي على مجموعتين جزئيتين غير خاليتين ومنفصلتين ولهما مجموع العناصر نفسه.

مسألة 7 نتأمّل تسع نقاط إحداثياتها أعداد صحيحة في الفراغ ثلاثي الأبعاد. أثبت أنّ إحدى القطع المستقيمة التي طرفيها من بين هذه النقاط التسع تحتوي على نقطة ثالثة إحداثياتها أعداد صحيحة.

مسألة 8 نتأمّل عدداً مؤلفاً من 16 خانة عشرية. أثبت أنّه توجد سلسلة مؤلفة من خانة أو عدة خانات متتالية من هذا العدد، بحيث يكون جداء ضرب هذه الخانات مربعاً كاملاً. مثلاً $5572\ 3782\ 7628\ 2353$.

مسألة 9 نتأمّل مجموعة عدد عناصرها $n+1$ محتواة في المجموعة $\{1,2,\ldots,2n\}$. أثبت أنّه يوجد عنصران من عناصر هذه المجموعة، يقسم أحدهما الآخر.

مسألة 10 نتأمّل مجموعة S مكوّنة من $n+2$ عدداً صحيحاً. أثبت أنّه يوجد عنصران مختلفان من عناصر هذه المجموعة، يكون مجموعهما، أو الفرق بينهما قابلاً للقسمة على $2n$.

مسألة 11 نعطى عدداً n من الكرات، و $b(\geq 2)$ صندوقاً لتوزيع الكرات عليها. جِدْ متراجحة تضم n و b بحيث تضمن إذا تحقّقت هذه المتراجحة أن يحتوي صندوقان على العدد ذاته من الكرات.

مسألة 12 لنتأمّل مجموعة الأعداد $S=\{1,2,3,\ldots,98\}$. أثبت أنّ كلّ مجموعة جزئيّة من S مكوّنة من 50 عنصراً تحوي زوجاً من الأعداد مجموعهما مكعّبٌ كامل.

مسألة 13 جِدْ كلّ الأعداد الطبيعيّة N التي تُكتب بأربع خانات عشريّة مختلفة غير معدومة، وتُحقّق الخاصّة الآتية: الفرق بين أكبر عدد نحصل عليه بإعادة ترتيب أرقام خانات N، وأصغر عدد نحصل عليه بالطريقة نفسها يساوي تماماً N.

مسألة 14 لتكن A مجموعة مكوّنة من 19 عدداً مختلفاً جرى اختيارها من المجموعة

$$\mathcal{S} = \{1+3k : 0 \le k \le 33\} = \{1,4,7,\dots,100\}$$

أثبت أنّه يوجد في A عددان مختلفان مجموعهما يساوي 104.

مسألة 15 لتكن A مجموعة مكوّنة من 10 أعداد طبيعيّة متتالية. أثبت أنّه يوجد في A عددٌ يكون أوّلياً مع بقيّة عناصر A. (تذكّر أنّ a أوّلي مع b إذا كان العدد 1 هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b).

مسألة 16 في مدرسةٍ هناك t أستاذاً و s طالباً. نفترض ما يأتي:

❶ كلُّ أستاذ يدرّس العدد نفسه k من الطلّاب.

❷ لكلِّ زوج من الطلّاب العدد نفسه h من الأساتذة المشتركين.

أثبت أنّ $\dfrac{s(s-1)}{k(k-1)} = \dfrac{t}{h}$.

مسألة 17 كُتِبَتْ الأعداد من 1 حتّى 24 على السبّورة. في كلّ مرّة، يمكن أن نستبدل بالأعداد a,b,c الأعداد

$$\frac{2b+2c-a}{3}, \frac{2c+2a-b}{3}, \frac{2a+2b-c}{3}$$

أيمكن أن يظهر بهذه الطريقة على السبّورة عدد أكبر أو يساوي 70 ؟

مسألة 18. في كل مربّع من شبكة بُعداها $m \times n$ يوجد عدد طبيعي موجب تماماً. الخطوة المسموحة هي أن نجمع العدد الصحيح ذاته إلى العددين الموجودين في مربعين متجاورين بحيث نحصل على أعداد موجبة أو صفرية. (المربعان المتجاوران هما مربعان يشتركان بضلع). أعط شرطاً لازماً وكافياً حتى يكون بالإمكان جعل جميع الأعداد على الشبكة صفرية بعد إجراء عدد منته من الخطوات المسموحة.

مسألة 19 كالعادة نكتب $\mathbb{N}_m$ دلالة على المجموعة $\{1,2,3,\dots,m\}$. ليكن a و b عددين طبيعيين موجبين تماماً. وليكن $f : \mathbb{N}_{ab+1} \to \mathbb{R}$. عندئذ

- إمّا أن يوجد تابع متزايدٌ تماماً $\varphi : \mathbb{N}_{a+1} \to \mathbb{N}_{ab+1}$ بحيث يكون $f \circ \varphi$ متزايداً.
- أو يوجد تابع متزايدٌ تماماً $\psi : \mathbb{N}_{b+1} \to \mathbb{N}_{ab+1}$ بحيث يكون $f \circ \psi$ متناقصاً.

مسألة 20 نتأمّل المجموعة $\mathcal{S} = \{1,2,\dots,n\}$، ونلوّن كل عنصر من عناصرها بأحد اللونين الأزرق أو الأحمر. نقول عن ثلاثية مرتبة (x,y,z) من $\mathcal{S}^3$ إنّها **ظريفة** إذا حقّقت الشرطين:

(i) المجموع $x+y+z$ يقبل القسمة على n.

(ii) الأعداد x و y و z تحمل اللّون ذاته.

نعلم أنّ عدد الثّلاثيّات الظريفة يساوي 1971، فما هي قيمة n؟

التعداد والتحليل التوافقي

مسألة 1 لنفترض أنّه لدينا $n+1$ عدداً جرى اختيارها من بين الأعداد $\{1,2,\ldots,2n\}$. أثبت أنّه يوجد عددان أوّليان فيما بينهما من بين الأعداد المُختارة.

الحل

لتكن $\mathcal{S}$ مجموعة الأعداد المُختارة، ولتكن $\mathcal{S}'=\mathcal{S}-1=\{a-1 : a\in\mathcal{S}\}$، من الواضح أنّ

$$\operatorname{card}\mathcal{S}=\operatorname{card}\mathcal{S}'=n+1$$

و

$$\operatorname{card}(\mathcal{S}\cup\mathcal{S}')\leq\operatorname{card}\{0,1,\ldots,2n\}=2n+1$$

إذن

$$\operatorname{card}\mathcal{S}+\operatorname{card}\mathcal{S}'-\operatorname{card}(\mathcal{S}\cap\mathcal{S}')\leq 2n+1$$

أو

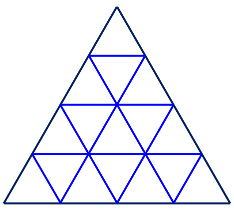
$$\operatorname{card}(\mathcal{S}\cap\mathcal{S}')\geq 2n+2-(2n+1)=1$$

فيوجد $k\in\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'$، أي $\{k,k+1\}\subset\mathcal{S}$، والعددان k و $k+1$ أوليّان فيما بينهما. ■

ملاحظة. هذه النتيجة أمثليّة، إذ توجد مجموعة $\mathcal{S}=\{2,4,\ldots,2n\}$ عدد عناصرها يساوي n وأيّ اثنين من عناصرها ليسا أوليّين فما بينهما.

مسألة 2 أرضٌ بشكل مثلّث متساوي الأضلاع، طول ضلعه 20 متراً، نزرع فيها 17 شجرةً. أثبت وجود شجرتين المسافة بينهما أقلّ من خمسة أمتار.

الحل



يمكن تجزئة الأرض إلى ستة عشر مثلّثاً كلّها مثلّثات متساوية الأضلاع، طول ضلع كلٍّ منها يساوي خمسة أمتار كما في الشكل المجاور. عندئذ، استناداً إلى مبدأ ديرخليه، لا بُدّ أن يحوي مثلّثٌ شجرتين على الأقلّ، وتكون، من ثَمّ، المسافة بينهما أقلّ من خمسة أمتار. ■

مسألة 3 أثبت أنّه في أيّ حفلٍ يضمّ أكثر من شخص واحدٍ، لا بُدّ من وجود شخصين يُجريان العدد نفسه من المصافحات.

الحل

لنفترض أنّ عدد المدعوّين إلى الحفل يساوي n. عندئذ يتراوح عددُ المصافحات التي يُجريها كلُّ مدعوٍّ بين 0 و $n-1$ مصافحةً. لنتأمّل التابع $\varphi:\{1,\ldots,n\}\to\{0,\ldots,n-1\}$ الذي يقرن بالمدعو رقم k عدد الأشخاص الذين صافحهم $\varphi(k)$. إذا كان φ متبايناً استنتجنا من كون لمنطلقه ولمستقره العدد ذاته من العناصر أنّه في الحقيقة غامرٌ. إذن يوجد مدعوّان a و b يحقّقان $\varphi(a)=0$ و $\varphi(b)=n-1$، أي إنّ b قد صافح جميع المدعوّين، بما فيهم المدعو a، وهذا يناقض كون a لم يصافح أحداً! إذن لا يمكن أن يكون φ متبايناً، ومن ثَمّ يوجد مدعوّان $a\neq b$ يحقّقان $\varphi(a)=\varphi(b)$، أي إنّهما قد أجريا العدد نفسه من المُصافحات. ■

مسألة 4 يتدرّب أستاذٌ في لعبة الشطرنج تحضيراً لبطولة العالم، فيلعبُ دوراً واحداً في اليوم على الأقل، وحتى لا يُرهق نفسه، يلعب أحد عشر دوراً في الأسبوع على الأكثر. أثبت أنّه إذا طالت فترة تدريبه بقدر كافٍ، فتوجد فترة مكوّنة من أيام متتالية، يكون اللاعب قد لعب فيها 21 دوراً.

الحل

لنعرّف P_k عددَ الأدوار التي لعبها أستاذ الشطرنج في الفترة التي تشمل الأيام من 1 حتّى k. لاحظ أنّ الأعداد P_k تتزايد تماماً لأنّ $P_{k+1} \geq 1 + P_k$، فاللاعب يلعب دوراً في كلّ يومٍ على الأقل. لاحظ أيضاً أنّ اللاعب لا يلعب أكثر من خمسة أدوار في اليوم الواحد، وإلاّ زاد عدد الادوار في أي أسبوع يحوي هذا اليوم عن أحد عشر دوراً.
لنتأمّل مجموعة الأعداد $\{P_1, P_2, \ldots, P_{22}\}$. لمّا كان P_{21} يمثّل عدد الأدوار التي لعبها اللاعب في ثلاثة أسابيع استنتجنا أنّ $P_{21} \leq 33$، ومن ثَمّ $P_{22} \leq 33 + 5 = 38$. وعليه فإنّ

$$\{P_1, P_2, \ldots, P_{22}\} \subset \{1, 2, \ldots, 38\}$$

لنتأمّل إذن التابع

$$\varphi : \{1, 2, \ldots, 22\} \to \{0, 1, \ldots, 20\}, k \mapsto P_k \bmod 21$$

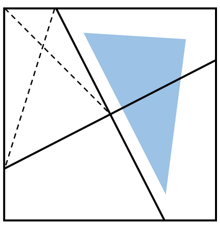
لايمكن أن يكون هذا التابع متبايناً، فلا بُدَّ من وجود عددين $1 \leq \ell < k \leq 22$ لهما باقي القسمة نفسه على العدد 21. أي إنّ 21 يقسم $P_k - P_\ell$. ولكن $1 \leq P_k - P_\ell \leq 38$، والمُضاعف الوحيد للعدد 21 في هذه المجموعة هو 21 نفسه، أي إنّ $P_k - P_\ell = 21$، وهذا يعني أنّ اللاعب قد لعب 21 دوراً في الأيام

$$\{\ell + 1, \ell + 2, \ldots, k\}$$

وهي النتيجة المرجوّة.

مسألة 5 افترض أنّه بالإمكان رسم مثّلث داخل مربع طول ضلعه يساوي الواحد، بحيث لا يقع مركز المربّع داخل المثلث. أثبت أنّ طول أحد أضلاع المثلث أقصر من الواحد.

الحل



لنرسم من مركز المربع O مستقيماً ℓ_1 يوازي **أقرب** أضلاع المثلث إلى O، ومستقيماً آخر عمودياً عليه في ℓ_2. يقسم المستقيمان ℓ_1 و ℓ_2 المربع إلى أربعة رباعيات طبوقة. ولمّا كان مركز المربّع يقع خارج المثلث يمكن للمثلث أن يقع على الأكثر ضمن رباعيّين متجاورين من الرباعيات الأربعة، ومن ثَمّ لا بُدّ أن يقع رأسان من رؤوس المثلث داخل أحد الرباعيات، والمسافة بين هذين الرأسين أقصر من أطول قطري الرباعي، الذي هو بدوره أقصر من الواحد.
ويتمّ الحل.

مسألة 6 نتأمّل مجموعة جزئية S من المجموعة $\{1, 2, \ldots, 100\}$ مؤلفة من 11 عنصراً، أثبت أنّ S تحتوي على مجموعتين جزئيتين غير خاليتين ومنفصلتين ولهما مجموع العناصر نفسه.

الحل

لتكن $\mathcal{P}^*(\mathcal{S})$ مجموعة الأجزاء غير الخالية في $\mathcal{S}$، إنّ عدد عناصر هذه المجموعة يساوي $2^{11}-1=2047$، وإذا كانت $A\in\mathcal{P}^*(\mathcal{S})$ عرّفنا $\Phi(A)=\sum_{k\in A}k$ أي مجموع عناصر A. من الواضح أنّ

$$1\le\Phi(A)\le\sum_{90}^{100}k=11\times\frac{100+90}{2}=1145$$

لنتأمّل إذن التطبيق $\Phi:\mathcal{P}^*(\mathcal{S})\to\{1,\ldots,1145\},\Phi(A)=\sum_{k\in A}k$ لا يمكن لهذا التطبيق أن يكون متبايناً لأن عدد عناصر منطلقه أصغر من عدد عناصر مستقرّه. وعليه توجد مجموعتان مختلفتان وغير خاليتين A' و B' تحقّقان $\Phi(A')=\Phi(B')$، وعندها يكفي أن نأخذ $A=A'\backslash(A'\cap B')$ و $B=B'\backslash(A'\cap B')$ لتكون المجموعتان A و B المجموعتين المنشودتين. ■

مسألة 7 نتأمّل تسع نقاط إحداثياتها أعداد صحيحة في الفراغ ثلاثي الأبعاد. أثبت أنّ إحدى القطع المستقيمة التي طرفيها من بين هذه النقاط التسع تحتوي على نقطة ثالثة إحداثياتها أعداد صحيحة.

الحل

لتكن $\mathcal{S}=\{P_i=(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i):1\le i\le 9\}$ مجموعة النقاط المعطاة، ولنتأمّل

$$\Phi:\mathcal{S}\to\{0,1\}^3,\Phi((\alpha,\beta,\gamma))=(\alpha\bmod 2,\beta\bmod 2,\gamma\bmod 2)$$

عدد عناصر المنطلق يزيد واحداً على عدد عناصر المستقر، فلا يمكن أن يكون Φ متبايناً إذن توجد نقطتان مختلفتان P_j و P_k في $\mathcal{S}$ بحيث $\Phi(P_j)=\Phi(P_k)$، وعندئذ تكون الأعداد $\alpha_j+\alpha_k,\beta_j+\beta_k,\gamma_j+\gamma_k$ جميعها زوجية، ومن ثَمّ تكون إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $[P_jP_k]$ جميعها أعداداً صحيحة، وهي النقطة الثالثة المطلوبة. ■

مسألة 8 نتأمّل عدداً مؤلفاً من 16 خانة عشرية. أثبت أنّه توجد سلسلة مؤلفة من خانة أو عدة خانات متتالية من هذا العدد، بحيث يكون جداء ضرب هذه الخانات مربعاً كاملاً. مثلاً $2353\ 7628\ 3782\ 5572$.

الحل

لتكن $d_1,d_2,\ldots,d_{16}$ خانات العدد المعطى. إذا كانت إحدى هذه الخانات 0 أو 1 أو 4 أو 9 تم إثبات المطلوب. إذن يمكننا أن نفترض أنّ أي خانة d_i تنتمي إلى المجموعة

$$\left\{2,3,5,6=2\times3,7,8=2^3\right\}$$

لنعرّف إذن

$$x_0=1,x_1=d_1,x_2=d_1d_2,\ldots,x_k=d_1d_2\cdots d_k,\ldots,x_{16}=d_1d_2\cdots d_{16}$$

في الحقيقة، $x_i=2^{\alpha_i}3^{\beta_i}5^{\gamma_i}7^{\delta_i}$. نقرن بكل $x=2^\alpha3^\beta5^\gamma7^\delta$ المقدار

$$\varphi(x)=(\alpha\bmod 2,\beta\bmod 2,\gamma\bmod 2,\delta\bmod 2)\in\{0,1\}^4$$

لا يمكن للمقادير $(\varphi(x_k))_{0\le k\le 16}$ أن تكون جميعها مختلفة، فيوجد $j<k$ بحيث $\varphi(x_j)=\varphi(x_k)$، وعندها يكون $d_{j+1}\cdots d_k=x_k/x_j$ مربّعاً كاملاً. ■

مسألة 9 نتأمّل مجموعة عدد عناصرها $n+1$ محتواة في المجموعة $\{1,2,\ldots,2n\}$. أثبت أنّه يوجد عنصران من عناصر هذه المجموعة، يقسم أحدهما الآخر.

الحل

في حالة عدد طبيعي m، نكتب α_m دلالة على أكبر عدد طبيعي k يُحقّق أنّ 2^k يقسم m. فيكون $2^{-\alpha_m}m$ عدداً فرديّاً أيّاًكان العدد الطبيعي m.

لتكن $\mathcal{S}$ مجموعة جزئيّة من $\{1,2,\ldots,2n\}$ عددُ عناصرها $n+1$، ولنتأمّل التطبيق

$$\varphi : \mathcal{S} \to \{1,3,\ldots,2n-1\},\ m \mapsto 2^{-\alpha_m}m$$

لمّا كان

$$\operatorname{card}(\{1,3,\ldots,2n-1\}) = n < n+1 = \operatorname{card}(\mathcal{S})$$

استنتجنا أنّ φ لا يمكن أن يكون متبايناً، ولا بُدّ من وجود عددين مختلفين k و ℓ في $\mathcal{S}$ يُحقّقان $\varphi(\ell)=\varphi(k)$. بالطبع يمكن أن نفترض أنّ $\ell<k$، وعندها نستنتج من المساواة $2^{-\alpha_k}k = 2^{-\alpha_\ell}\ell$ أنّ ℓ يقسم k، وهي النتيجة المرجوّة.

مسألة 10 نتأمّل مجموعة $\mathcal{S}$ مكوّنة من $n+2$ عدداً صحيحاً. أثبت أنّه يوجد عنصران مختلفان من عناصر هذه المجموعة، يكون مجموعهما، أو الفرق بينهما قابلاً للقسمة على $2n$.

الحل

لنتأمّل التطبيق

$$\varphi : \mathcal{S} \to \{0,1,\ldots,2n-1\}, \varphi(x) = x \mod(2n)$$

- إذا لم يكن φ متبايناً وجدنا عنصرين مختلفين x و y من $\mathcal{S}$ يحققان $\varphi(x)=\varphi(y)$ وهذا يقتضي أن يكون $2n \mid (x-y)$.
- إذا كان φ متبايناً كانت $\mathcal{T}=\varphi(\mathcal{S})$ مجموعة جزئية من $\{0,1,\ldots,2n-1\}$ عدد عناصرها يساوي $n+2$. وكانت $\mathcal{T}'=2n-\mathcal{T}=\{2n-t : t\in\mathcal{T}\}$ مجموعة جزئية من $\{1,\ldots,2n\}$ عدد عناصرها يساوي $n+2$ أيضاً. إذن

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(\mathcal{T}'\cap\mathcal{T}) &= \operatorname{card}(\mathcal{T})+\operatorname{card}(\mathcal{T}')-\operatorname{card}(\mathcal{T}'\cup\mathcal{T})\\ &\geq n+2+n+2-(2n+1)=3\end{aligned}$$

- إذن يوجد ثلاثة عناصر على الأقل في $\mathcal{T}'\cap\mathcal{T}$. وعلى الخصوص يوجد عنصر $t\in\mathcal{T}'\cap\mathcal{T}\setminus\{n\}$ يحقّق $t=\varphi(x)=2n-\varphi(y)$، هذا يقتضي أن يكون $x\neq y$ و $2n \mid (x+y)$.

وهي النتيجة المرجوّة.

مسألة 11 نعطى عدداً n من الكرات، و $b(\geq 2)$ صندوقاً لتوزيع الكرات عليها. جِدْ متراجحة تضم n و b بحيث تضمن إذا تحقّقت هذه المتراجحة أن يحتوي صندوقان على العدد ذاته من الكرات.

الحل

لنرمز بالرمز n_k إلى عدد الكرات الموجودة في العلبة رقم k حيث $1 \leq k \leq b$. لو افترضنا أنّ جميع الأعداد $(n_k)_{1\leq k\leq b}$ مختلفة عندئذ يكون مجموعها n أكبر أو يساوي $0+1+\cdots+(b-1)=\frac{b(b-1)}{2}$. إذن إذا كان $n<\frac{b(b-1)}{2}$ فلا بُدّ أن تتساوى قيمتان على الأقل من بين $(n_1,n_2,\ldots,n_b)$. ■

مسألة 12 لنتأمّل مجموعة الأعداد $S=\{1,2,3,\ldots,98\}$. أثبت أنّ كلّ مجموعة جزئيّة من S مكوّنة من 50 عنصراً تحوي زوجاً من الأعداد مجموعهما مكعّبٌ كامل.

الحل

لنتأمّل مجموعة جزئيّة ما B من S عددُ عناصرها يساوي 50. ولنعرّف B_1 و B_2 كما يلي :

$$B_1=B\cap[1,26] \quad \text{و} \quad B_2=B\cap[27,98]$$

- حالة $\operatorname{card}(B_1)>13$.
نعرّف المجموعة $B_1'=\{27-x : x\in B_1\}$ فيكون $\operatorname{card}(B_1')>13$، والمجموعتان B_1 و B_1' مجموعتان جزئيّتان من $\{1,2,\ldots,26\}$ التي عدد عناصرها 26، فلا بُدَّ من وجود عنصر مشترك y ينتمي إلى كلٍّ من B_1 و B_1'، وهذا يعني وجود عنصر x في B يُحقّق $y=27-x$، وتتحقّق بذلك الخاصّة المطلوبة.
- حالة $\operatorname{card}(B_2)>36$.
نعرّف المجموعة $B_2'=\{125-x : x\in B_2\}$ فيكون $\operatorname{card}(B_2')>36$، والمجموعتان B_2 و B_2' مجموعتان جزئيّتان من $\{27,28,\ldots,98\}$ التي عدد عناصرها 72، فلا بُدَّ من وجود عنصر مشترك y ينتمي إلى كلٍّ من B_2 و B_2'، وهذا يعني وجود عنصر x في B يُحقّق $y=125-x$، وتتحقّق بذلك الخاصّة المطلوبة.
- بقيت إذن حالة $\operatorname{card}(B_1)\leq 13$ و $\operatorname{card}(B_2)\leq 36$، ولكنّها حالة مستحيلة الوقوع، لأنّه عندئذ يكون لدينا

$$50=\operatorname{card}(B)=\operatorname{card}(B_1)+\operatorname{card}(B_2)\leq 13+36=49$$

وهذا خُلفٌ صارخٌ. ■

مسألة 13 جِدْ كلّ الأعداد الطبيعيّة N التي تُكتب بأربع خانات عشريّة مختلفة غير معدومة، وتُحقّق الخاصّة الآتية: الفرق بين أكبر عدد نحصل عليه بإعادة ترتيب أرقام خانات N، وأصغر عدد نحصل عليه بالطريقة نفسها يساوي تماماً N.

الحل

لنفترض أنّ أرقام خانات N هي a و b و c و d، حيث $0<d<c<b<a$. فيكون أكبر عدد نحصل عليه بإعادة ترتيب أرقام خانات N، هو

$$\max=a10^3+b10^2+c10+d$$

وكذلك يكون أصغر عدد نحصل عليه بالطريقة نفسها، هو

$$\min = d10^3 + c10^2 + b10 + a$$

وعملاً بفرْض المسألة لدينا $N = \max - \min$، أي

$$\begin{aligned} N &= (a-d)10^3 + (b-c)10^2 + (c-b)10 + (d-a) \\ &= (a-d)10^3 + (b-c-1)10^2 + (9-b+c)10 + (10-a+d) \end{aligned}$$

وعليه فإنّ الأعداد

$$(a-d, b-c-1, 9-b+c, 10-a+d)$$

تمثّل تبديلاً على الأعداد (a,b,c,d). لنلاحظ أنّ

$$a-d > b-c-1 \quad \text{و} \quad 9-b+c > 10-a+d$$

إذن $a = \max(a-d, 9-b+c)$، ولكن لا يمكن أن يكون $a = a-d$، إذن $a = 9-b+c$، ومنه

$$a+b-c = 9 \qquad (1)$$

وبأسلوب مماثل $d = \min(10-a+d, b-c-1)$، ولا يمكن أن يكون $d = 10-a+d$، إذن $d = b-c-1$، ومنه

$$b-c-d = 1 \qquad (2)$$

نستنتج من ذلك أنّ $\{b,c\} = \{a-d, 10-a-d\}$:

- فإذا كان $b = 10-a+d$ و $c = a-d$ استنتجنا أنّ $a+b-d = 10$ و $a-c-d = 0$، وبجمع هاتين المعادلتين مع (1) و (2) طرفاً مع طرف نجد $3(a+b-c-d) = 20$ وهذا خُلفٌ لأنّ 3 لا يقسم 20.
- نستنتج إذن أنّ $c = 10-a+d$ و $b = a-d$، ومن ثمّ

$$a-b-d = 0 \qquad (3)$$

$$a+c-d = 10 \qquad (4)$$

وبالحلّ المشترك لجملة المعادلات (1) و (2) و (3) و (4) نجد

$$a = 7, b = 6, c = 4, d = 1$$

وعليه فإنّ

$$N = 7641 - 1467 = 6174$$

وهي النتيجة المرجوّة. ■

مسألة 14 لتكن A مجموعة مكوّنة من 19 عدداً مختلفاً جرى اختيارها من المجموعة

$$S = \{1+3k : 0 \le k \le 33\} = \{1,4,7,\ldots,100\}$$

أثبت أنّه يوجد في A عددان مختلفان مجموعهما يساوي 104.

الحل

لنتأمّل مجموعة جزئيّة B من $\mathcal{S}$ تُحقّق الخاصّة $\mathbb{P}$ الآتية:

$\mathbb{P}$: " مجموع أيّ عددين مختلفين من B لا يساوي 104 "

ثُمّ لنعرّف B' بالعلاقة كما يأتي:

$$B' = 104 - B = \{104 - b : b \in B\}$$

عندئذ، بملاحظة أنّ $104 = 2 + 3 \times 34$ نرى أنّ

$$\begin{aligned} B' &= \{104 - n : n \in B\} \\ &\subset \{104 - n : n \in \mathcal{S}\} \\ &= \{2 + 3 \times 34 - (1 + 3k) : 0 \leq k \leq 33\} \\ &= \{1 + 3 \times (34 - k) : 0 \leq k \leq 33\} \\ &= \{1 + 3 \times k : 1 \leq k \leq 34\} \subset \mathcal{S} \cup \{103\} \end{aligned}$$

ومن ثَمّ $B \cup B' \subset \mathcal{S} \cup \{103\}$.

لنتأمّل عنصراً n من $B \cap B'$. عندئذ ينتمي العددان n و $n' = 104 - n$ إلى B، ومجموعهما يساوي 104، وهذا يناقض الخاصّة $\mathbb{P}$ إلاّ في حالة كون $n = n'$، التي توافق $n = 52$. إذن $B \cap B' \subset \{52\}$.

نستنتج مما سبق أنّ

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(B) + \mathrm{card}(B') &= \mathrm{card}(B \cup B') + \mathrm{card}(B \cap B') \\ &\leq \mathrm{card}(\mathcal{S} \cup \{103\}) + \mathrm{card}(\{52\}) = 35 + 1 = 36 \end{aligned}$$

إذن $\mathrm{card}(B) \leq 18$، فكلّ مجموعة جزئيّة A من $\mathcal{S}$ عدد عناصرها أكبر أو يساوي 19 لا تُحقّق $\mathbb{P}$. ■

مسألة 15 لتكن A مجموعة مكوّنة من 10 أعداد طبيعيّة متتالية. أثبت أنّه يوجد في A عددٌ يكون أوّلياً مع بقيّة عناصر A. (تذكّر أنّ a أوّلي مع b إذا كان العدد 1 هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b).

الحل

لنكتب A_p دلالة على عناصر A التي تقبل القسمة على p. تحوي A خمسة أعداد فرديّة:

$$\mathrm{card}(A \setminus A_2) = 5$$

ومن بين هذه الأعداد الفرديّة هناك على الأكثر عددان من مضاعفات 3، وواحد من مضاعفات الخمسة وواحد من مضاعفات 7. إذن

$$\mathrm{card}(A \setminus (A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7)) \geq 1$$

لنختر إذن عنصراً a من $A \setminus (A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7)$. وليكن b أيّ عنصرٍ من A. إذا لم يكن العددان a و b أوليين فيما بينهما، وجدنا عدداً أولياً p يقسم كلاً منهما. وعندئذ يقسم p الفرق $a - b$ وهو عددٌ أصغر من 10. فلا بد أن يكون p عنصراً من $\{2, 3, 5, 7\}$، وهذا يناقض تعريف a. إذن يجب أن يكون $\gcd(a, b) = 1$ وهي النتيجة المطلوبة.

مسألة 16 في مدرسةٍ هناك t أستاذاً و s طالباً. نفترض ما يلي :

❶ كلُّ أستاذ يدرّس العدد نفسه k من الطلاّب.

❷ لكلِّ زوج من الطلاّب العدد نفسه h من الأساتذة المشتركين.

أثبت أنّ $\frac{s(s-1)}{k(k-1)} = \frac{t}{h}$.

الحل

لتكن $\mathcal{T}$ مجموعة الأساتذة ولتكن $\mathcal{S}$ مجموعة الطلاب. ولتكن $\mathcal{S}^{(2)}$ مجموعة المجموعات الجزئيّة المكوّنة من عنصرين من $\mathcal{S}$. في حالة زوج من الطلاب $\{\sigma,\sigma'\} \in \mathcal{S}^{(2)}$ وأستاذ $\tau \in \mathcal{T}$ نكتب $\tau \leadsto \{\sigma,\sigma'\}$ إذا كان τ أستاذاً مشتركاً للطالبين σ و σ'. وأخيراً لتكن المجموعة

$$\mathcal{A} = \left\{(\tau,\{\sigma,\sigma'\}) \in \mathcal{T} \times \mathcal{S}^{(2)} : \tau \leadsto \{\sigma,\sigma'\}\right\}$$

استناداً إلى الفرْض ❶ إذا عرّفنا في حالة أستاذ τ من $\mathcal{T}$ المجموعة

$$\mathcal{A}_\tau = \left\{\{\sigma,\sigma'\} \in \mathcal{S}^{(2)} : \tau \leadsto \{\sigma,\sigma'\}\right\}$$

كان

$$\operatorname{card}(\mathcal{A}_\tau) = \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

واستناداً إلى الفرض ❷ إذا عرّفنا في حالة زوج من الطلاب $\{\sigma,\sigma'\}$ من $\mathcal{S}^{(2)}$ المجموعة

$$\mathcal{A}_{\{\sigma,\sigma'\}} = \left\{\tau \in \mathcal{T} : \tau \leadsto \{\sigma,\sigma'\}\right\}$$

كان

$$\operatorname{card}(\mathcal{A}_{\{\sigma,\sigma'\}}) = h \; .$$

لنحسب إذن عدد عناصر المجموعة $\mathcal{A}$ بطريقتين كما يلي:

$$\operatorname{card}(\mathcal{A}) = \sum_{\tau\in\mathcal{T}} \operatorname{card}(\mathcal{A}_\tau) = \operatorname{card}(\mathcal{T}) \times \frac{k(k-1)}{2} = \frac{tk(k-1)}{2}$$

$$\operatorname{card}(\mathcal{A}) = \sum_{\{\sigma,\sigma'\}\in\mathcal{S}^{(2)}} \operatorname{card}(\mathcal{A}_{\{\sigma,\sigma'\}}) = \operatorname{card}(\mathcal{S}^{(2)}) \times h = \frac{hs(s-1)}{2}$$

إذن لا بُدّ أن يكون $tk(k-1) = hs(s-1)$. وهي النتيجة المرجوّة. ■

مسألة 17 كُتِبَتْ الأعداد من 1 حتّى 24 على السبّورة. في كلّ مرّة، يمكن أن نستبدل بالأعداد a, b, c الأعداد

$$\frac{2b+2c-a}{3}, \frac{2c+2a-b}{3}, \frac{2a+2b-c}{3}$$

أيمكن أن يظهر بهذه الطريقة على السبّورة عدد أكبر أو يساوي 70 ؟

الحل

لنبحث عن مقادير تبقى ثابتة عند الخضوع للتحويل المبيّن في النصّ. نلاحظ مباشرة أنّ

$$\frac{2b+2c-a}{3}+\frac{2c+2a-b}{3}+\frac{2a+2b-c}{3}=a+b+c$$

وبقليل من التفكير نلاحظ أيضاً أنّ

$$\left(\frac{2b+2c-a}{3}\right)^2+\left(\frac{2c+2a-b}{3}\right)^2+\left(\frac{2a+2b-c}{3}\right)^2=a^2+b^2+c^2$$

إذن في كلّ لحظة، يكون مجموع الأعداد المكتوبة على السبورة مساوياً $1+2+\cdots+24=300$، ويكون مجموع مربّعات الأعداد المكتوبة على السبورة مساوياً $1^2+2^2+\cdots+24^2=4900=70^2$. إذن لا يمكن أن يظهر على السبّورة عددٌ أكبر تماماً من 70 في أيّة لحظة. أمّا إذا ظهر العدد 70 فهذا يعني أنّ بقيّة الأعداد تساوي 0، ومن ثَمّ لا يمكن أن يساوي مجموعها 300. نستنتج أنّه في جميع الأحوال، لا يمكن أن يظهر عددٌ أكبر أو يساوي 70 على السبورة.

ملاحظة. لنفترض أنّ $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ هي أعدادٌ حقيقيّة تُحقّق

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^2=B \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^{n}x_k=A$$

وليكن M واحداً من الأعداد $x_1,\ldots,x_n$. في الحقيقة، دون الإقلال من عموميّة الدراسة يمكن أن نفترض أنّ $M=x_n$، عندئذ يكون لدينا

$$\sum_{k=1}^{n-1}x_k^2=B-M^2 \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^{n-1}x_k=A-M$$

ولكن، إذا عرّفنا العدد μ بالصيغة التالية

$$\mu=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}x_j=\frac{A-M}{n-1}$$

كان لدينا

$$0\le\sum_{k=1}^{n-1}(x_k-\mu)^2=\sum_{k=1}^{n-1}(x_k^2-2\mu x_k+\mu^2)=\sum_{k=1}^{n-1}x_k^2-(n-1)\mu^2$$

أو

$$0\le B-M^2-(n-1)\left(\frac{A-M}{n-1}\right)^2$$

وهذا يُكافئ

$$\left(M-\frac{A}{n}\right)^2\le\frac{n-1}{n^2}(nB-A^2)$$

وعليه يكون

$$\frac{A}{n}-\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{\frac{B}{n}-\left(\frac{A}{n}\right)^2}\le M\le\frac{A}{n}+\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{\frac{B}{n}-\left(\frac{A}{n}\right)^2}$$

إذن لقد أثبتنا الخاصّة الآتية: لنفترض أنّ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ هي أعدادٌ حقيقيّة تُحقّق

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = A \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = B$$

عندئذ

$$\frac{A}{n} \le \max(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le \frac{A}{n} + \sqrt{n-1} \cdot \sqrt{\frac{B}{n} - \left(\frac{A}{n}\right)^2}$$

$$\frac{A}{n} - \sqrt{n-1} \cdot \sqrt{\frac{B}{n} - \left(\frac{A}{n}\right)^2} \le \min(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le \frac{A}{n}$$

فإذا استفدنا من هذه النتيجة في التمرين السابق، حيث $n = 24$، $A = 300$ و $B = 4900$، نجد أنّ الحدّ الأعلى M للقيم التي ستظهر على السبّورة يُحقّق

$$M \le \frac{25}{2} + \frac{115}{2\sqrt{3}} < 45.7$$

فلا يمكن أن يظهر على السبّورة أي عددٍ يزيد عن $\frac{25}{2} + \frac{115}{2\sqrt{3}}$، والحد 70 حدٌّ بعيدٌ جدّاً.

مسألة 18. في كل مربّع من شبكة بُعداها $m \times n$ يوجد عدد طبيعي موجب تماماً. الخطوة المسموحة هي أن نجمع العدد الصحيح ذاته إلى العددين الموجودين في مربعين متجاورين بحيث نحصل على أعداد موجبة أو صفرية. (المربعان المتجاوران هما مربعان يشتركان بضلع). أعط شرطاً لازماً وكافياً حتى يكون بالإمكان جعل جميع الأعداد على الشبكة صفرية بعد إجراء عدد منتهمن الخطوات المسموحة.

الحل

نبدأ بتلوين الشبكة بمربعات سوداء وبيضاء على التناوب مثل رقعة الشطرنج. عندئذ عندما نجمع العدد نفسه إلى مربعين متجاورين كان أحدهما أبيض اللون والآخر أسود اللون. وعليه إذا رمزنا بالرمز S_B إلى مجموع الأعداد على المربعات السوداء، وبالرمز S_W إلى مجموع الأعداد على المربعات البيضاء، وجدنا أن الفرق $S_B - S_W$ يبقى ثابتاً بعد إجراء أي خطوة من الخطوات المسموحة. وإذا أردنا في النهاية أن نصل إلى حالة تكون فيها جميع الأعداد على الشبكة صفرية وجب أن يكون لدينا في البدء $S_B - S_W = 0$ فهذا شرط لازم.

لنبرهن أن هذا الشرط كافٍ أيضاً. إذا كانت الأعداد a, b, c موجودة في ثلاثة مربعات متجاورة A, B, C. عندئذ

- إذا كان $a \ge b$ جمعنا إلى المربعين B, A المقدار $k = -a$ فيصبح العدد في المربع A صفرياً.
- وإذا كان $a < b$ جمعنا إلى المربعين C, B المقدار $k = a - b$ ثمّ جمعنا إلى المربعين B, A المقدار $k = -a$ فيصبح العدد في المربعين A, B صفريين معاً.

بهذه الخوارزمية مطبقة سطراً سطراً يمكننا أن نجعل جميع الأعداد صفرية باستثناء تلك الموجودة في العمودين الأخيرين، ثُمّ بتطبيق هذه الخوارزمية على العمودين الأخيرين بدءاً من الأعلى فنجعل جميع أعداد الأسطر صفرية باستثناء العددين الموجودين في مربعين متجاورين في أسفل هذين العمودين. هذان العددان متساويان لأنّ $S_B = S_W$ فما علينا إلاّ أن نجري خطوة مسموحة أخيرة فنجعلهما صفريين أيضاً. ■

مسألة 19 كالعادة نكتب $\mathbb{N}_m$ دلالة على المجموعة $\{1,2,3,\ldots,m\}$. ليكن a و b عددين طبيعيين موجبين تماماً. وليكن $f:\mathbb{N}_{ab+1}\to\mathbb{R}$. عندئذ

- إمّا أن يوجد تابع متزايدٌ تماماً $\varphi:\mathbb{N}_{a+1}\to\mathbb{N}_{ab+1}$ بحيث يكون $f\circ\varphi$ متزايداً.
- أو يوجد تابع متزايدٌ تماماً $\psi:\mathbb{N}_{b+1}\to\mathbb{N}_{ab+1}$ بحيث يكون $f\circ\psi$ متناقصاً.

الحل

في حالة i من $\mathbb{N}_{ab+1}$ نعرّف العدد a_i بأنه أكبر عدد طبيعي موجب k بحيث يوجد تابع متزايدٌ تماماً $\varphi:\mathbb{N}_k\to\mathbb{N}_i$ يحقّق الشرطين: $f\circ\varphi$ متزايدٌ و $\varphi(k)=i$، ونعرّف بالمثل العدد b_i بأنّه أكبرُ عدد طبيعي موجب ℓ بحيث يوجد تابع متزايدٌ تماماً $\psi:\mathbb{N}_\ell\to\mathbb{N}_i$ يحقّق الشرطين: $f\circ\psi$ متناقصٌ و $\psi(\ell)=i$. نتأمّل إذن التطبيق $(a_i,b_i)\mapsto i$.

الآن لنفترض أنّ $j<i$ ولنناقش حالتين:

- ♦ حالة $f(i)\le f(j)$ ، نعلم أنّه يوجد تابع متزايدٌ تماماً $\varphi:\mathbb{N}_{a_i}\to\mathbb{N}_i$ يحقّق الشرطين: $f\circ\varphi$ متزايدٌ و $\varphi(a_i)=i$، وإذا مدّدنا φ بأن عرّفنا $\varphi(a_i+1)=j$ صار لدينا تابع متزايدٌ تماماً $\varphi:\mathbb{N}_{a_i+1}\to\mathbb{N}_j$ يحقّق الشرطين: $f\circ\varphi$ متزايدٌ و $\varphi(a_i+1)=j$، إذن $a_j\ge a_i+1>a_i$.
- ♦ حالة $f(i)\ge f(j)$ ، نعلم أنّه يوجد تابع متزايدٌ تماماً $\psi:\mathbb{N}_{b_i}\to\mathbb{N}_i$ يحقّق الشرطين: $f\circ\psi$ متناقصٌ و $\psi(b_i)=i$، وإذا مدّدنا ψ بأن عرّفنا $\psi(b_i+1)=j$ صار لدينا تابع متناقصٌ تماماً $\psi:\mathbb{N}_{b_i+1}\to\mathbb{N}_j$ يحقّق الشرطين: $f\circ\psi$ متناقصٌ و $\psi(b_i+1)=j$، إذن $b_j\ge b_i+1>b_i$.

ما سبق يبرهن أنّ $j<i$ يقتضي أن يكون $(a_i,b_i)\ne(a_j,b_j)$، فالتطبيق $(a_i,b_i)\mapsto i$ متباينٌ.
لنفترض على سبيل الجدل أنّ النتيجة المعطاة غير صحيحة. عندئذ يكون $a_i\le a$ و $b_i\le b$ أياً كانت قيمة i إذن التطبيق $(a_i,b_i)\mapsto i$ الذي منطلقه $\mathbb{N}_{ab+1}$ يأخذ قيمه في $\mathbb{N}_a\times\mathbb{N}_b$، وهذا يناقض كونه متبايناً. هذا التناقض يثبت صحة النتيجة المعروفة باسم مبرهنة **Erdös-Szekeres**. ◼

مسألة 20 نتأمّل المجموعة $\mathcal{S}=\{1,2,\ldots,n\}$، ونلوّن كل عنصر من عناصرها بأحد اللونين الأزرق أو الأحمر.
نقول عن ثلاثية مرتبة (x,y,z) من $\mathcal{S}^3$ إنّها **ظريفة** إذا حقّقت الشرطين:

(i) المجموع $x+y+z$ يقبل القسمة على n .

(ii) الأعداد x و y و z تحمل اللّون ذاته.

نعلم أنّ عدد الثّلاثيّات الظريفة يساوي 1971، فما هي قيمة n ؟

الحل

لنرمز بالرمز $\mathcal{B}$ إلى مجموعة عناصر $\mathcal{S}$ الملوّنة باللّون الأزرق وليكن b عدد عناصرها. ولنرمز بالرمز $\mathcal{R}$ إلى مجموعة عناصر $\mathcal{S}$ الملوّنة باللّون الأحمر وليكن r عدد عناصرها.

لتكن $\mathcal{D}$ مجموعة الثلاثيّات (x,y,z) التي تحقّق الشرط (i). و $\mathcal{M}$ مجموعة الثلاثيّات (x,y,z) التي تحقّق الشرط (ii). أمّا مجموعة الثلاثيات الظريفة فهي إذن $\mathcal{C} = \mathcal{D} \cap \mathcal{M}$. أخيراً لتكن $\mathcal{E} = \mathcal{D} \backslash \mathcal{M}$ وهي مجموعة الثلاثيات (x,y,z) من $\mathcal{S}^3$ التي تحقّق الشرط (i) ولكنّ عناصرها x و y و z **لا** تحمل اللّون ذاته.

سنحسب عدد عناصر كلّ من $\mathcal{D}$ و $\mathcal{E}$ لنستنتج من ذلك عدد عناصر $\mathcal{C}$.

توطئة 1. يعطى عدد عناصر $\mathcal{D}$ بالصيغة $\operatorname{card}\mathcal{D} = n^2$.

الإثبات. في حالة $(x,y) \in \mathcal{S}^2$ نعرّف $z_{(x,y)} = \left(1 + \left\lfloor \frac{x+y}{n} \right\rfloor\right)n - x - y$ فنلاحظ استناداً إلى تعريف الجزء الصحيح أنّ

$$n\left\lfloor \frac{x+y}{n} \right\rfloor \le x + y < n\left(\left\lfloor \frac{x+y}{n} \right\rfloor + 1\right)$$

أو

$$n\left(\left\lfloor \frac{x+y}{n} \right\rfloor + 1\right) - n \le x + y < n\left(\left\lfloor \frac{x+y}{n} \right\rfloor + 1\right)$$

أي $0 < z_{(x,y)} \le n$ أو $z_{(x,y)} \in \mathcal{S}$، وأكثر من ذلك فإنّ العدد n يقسم $x + y + z_{(x,y)}$، أي إنّ الثلاثية $\left(x, y, z_{(x,y)}\right)$ تحقّق الشرط (i) فهي تنتمي إلى $\mathcal{D}$. لنتأمّل إذن التطبيقين

$$\begin{aligned}
&\Theta : \mathcal{S}^2 \to \mathcal{D}, (x,y) \mapsto \left(x, y, z_{(x,y)}\right)\\
&\Theta' : \mathcal{D} \to \mathcal{S}^2, \mapsto (x,y,z) \mapsto (x,y)
\end{aligned}$$

من الواضح أنّ $\Theta' \circ \Theta = I_{\mathcal{S}^2}$.

ومن ناحية أخرى، إذا كان $(x,y,z) \in \mathcal{D}$ استنتجنا أنّ $x + y + z = \lambda n$ حيث λ عدد من المجموعة $\{1,2,3\}$ لأنّ $1 \le x + y + z \le 3n$. ونستنتج من كون $0 < z \le n$ أنّ $0 < \lambda n - x - y \le n$، وهذه المتراجحة تكافئ $(\lambda - 1) \le \frac{x+y}{n} < \lambda$ أي $\lambda - 1 = \left\lfloor \frac{x+y}{n} \right\rfloor$ ومن ثمّ

$$z = \lambda n - x - y = z_{(x,y)}$$

أي $\Theta \circ \Theta' = I_{\mathcal{D}}$. فنكون قد أثبتنا أنّ Θ تقابلٌ. وعليه

$$\operatorname{card}\mathcal{D} = \operatorname{card}(\mathcal{S}^2) = (\operatorname{card}\mathcal{S})^2 = n^2 .$$

ويكتمل إثبات التوطئة 1. ■

الآن لنتأمّل المجموعات

$$\begin{aligned}
U &= \mathcal{E} \cap (\mathcal{R} \times \mathcal{B} \times \mathcal{S})\\
V &= \mathcal{E} \cap (\mathcal{S} \times \mathcal{R} \times \mathcal{B})\\
W &= \mathcal{E} \cap (\mathcal{B} \times \mathcal{S} \times \mathcal{R})
\end{aligned}$$

توطئة 2. تُجزّئ المجموعات U و V و W المجموعة $\mathcal{E}$ إلى ثلاثة مجموعات لها عدد العناصر ذاته.

الإثبات. في الحقيقة، من الواضح أنّ $U \cap V = \varnothing$ لأنّ المركّبات الوسطى من عناصر U زرقاء اللون في حين أنّ المركّبات الوسطى من عناصر V حمراء اللون. ونجد بالمثل أنّ $V \cap W = \varnothing$ و $W \cap U = \varnothing$.

الآن ليكن (x, y, z) عنصراً من $\mathcal{E}$ ولنناقش الحالات الآتية:

B. $x \in \mathcal{R}$. عندئذ

1.1. إمّا $y \in \mathcal{R}$ و $z \in \mathcal{B}$، أي $(x, y, z) \in V$.

2.1. أو $y \in \mathcal{B}$ ومن ثَمّ $(x, y, z) \in U$.

C. $x \in \mathcal{B}$. عندئذ

1.2. إمّا $z \in \mathcal{R}$ ومن ثَمّ $(x, y, z) \in W$.

2.2. أو $z \in \mathcal{B}$ ومن ثَمّ $y \in \mathcal{R}$، أي $(x, y, z) \in V$.

إذن $(x, y, z) \in U \cup V \cup W$. ومنه $\mathcal{E} = U \cup V \cup W$. أي تؤلّف U و V و W تجزئة للمجموعة $\mathcal{E}$.

وأخيراً من الواضح أنّ التقابل $\rho : \mathcal{S}^3 \to \mathcal{S}^3, (x, y, z) \mapsto (z, x, y)$ يعرّف تقابلاً يحقّق

$$\rho(U) = V \quad \text{و} \quad \rho(V) = W$$

إذن $\operatorname{card} U = \operatorname{card} V = \operatorname{card} W$. ■

فنكون بذلك قد أثبتنا النتيجة الآتية:

نتيجة 3. $\operatorname{card} \mathcal{E} = 3 \operatorname{card} U$.

توطئة 4. $\operatorname{card} U = \operatorname{card}(\mathcal{R} \times \mathcal{B}) = rb$.

الإثبات. في الحقيقة، إذا تأمّلنا التطبيقين Θ و Θ' من التوطئة 1. وجدنا أنّ

$$\Theta(\mathcal{R} \times \mathcal{B}) \subset U \quad \text{و} \quad \Theta'(U) \subset \mathcal{R} \times \mathcal{B}$$

إذن $\Theta(\mathcal{R} \times \mathcal{B}) = U$، ولأنّ Θ تقابلٌ استنتجنا أنّ $\operatorname{card} U = \operatorname{card}(\mathcal{R} \times \mathcal{B})$. ■

نستنتج مما سبق أنّ

$$\operatorname{card} \mathcal{C} = n^2 - 3rb = (r + b)^2 - 3rb = r^2 + b^2 - rb$$

تؤول بذلك المسألة إلى تعيين n إذا علمنا أنّ $n = r + b$ وأنّ $n^2 - 3rb = 1971$.

لمّا كان $3 \mid 1971$ استنتجنا أنّ $3 \mid n^2$، ومن ثَمّ $3 \mid n$، ولكن $9 \mid 1971$ إذن $3 \mid rb$ و $3 \mid (r + b)$ فلا بُدّ أن يكون $r = 3p$ و $b = 3q$. وتؤول المسألة إلى تعيين p و q بحيث

$$p^2 + q^2 - pq = \frac{1971}{9} = 219$$

بسبب التناظر يمكننا أن نفترض أنّ $p \leq q$ وعندئذ لأنّ $1 \leq x^2 - x + 1 \leq \frac{3}{4}$ في حالة $0 \leq x \leq 1$ استنتجنا أنّ $1 \geq \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q} - 1 \geq \frac{3}{4}$ ومنه $q^2 \geq 219 \geq \frac{3}{4}q^2$ وهذا يقتضي أنّ $14 \leq q \leq 17$.

- إذا كان $q = 14$ كان $p^2 - 14p = 23$ وليس لهذه المعادلة حلٌّ صحيح.
- إذا كان $q = 15$ كان $p^2 - 15p + 6 = 0$ وليس لهذه المعادلة حلٌّ صحيح.
- إذا كان $q = 16$ كان $p^2 - 16p + 37 = 0$ وليس لهذه المعادلة حلٌّ صحيح.
- إذا كان $q = 17$ كان $p^2 - 17p + 70 = 0$ إذن $p \in \{10, 7\}$.

وعليه، نجد $\{r, b\} \in \left\{\{21, 51\}, \{30, 51\}\right\}$ ومن ثمّ $n \in \left\{72, 81\right\}$ وهما حلّا المسألة المطروحة.

كثيرات الحدود

مسألة 21 عيّن جميع كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة $P(X)$ التي تحقّق الشرط:
$$P(2X^2-1)=\frac{1}{2}(P(X))^2-1 .$$

مسألة 22 نتأمّل كثيري حدود واحديين أمثالهما حقيقيّة P و Q يحقّقان $\deg P+\deg Q>0$. نفترض أنهما يحققان الخاصة الآتية: مهما كان العدد الحقيقي x، إذا كان $P(x)$ مربّع عدد صحيح كان $Q(x)$ مربّع عدد صحيح، وبالعكس، إذا كان $Q(x)$ مربّع عدد صحيح كان $P(x)$ مربّع عدد صحيح أيضاً. أثبت أنّه يوجد كثير حدود أمثاله حقيقيّة بحيث
$$P(X)Q(X)=(R(X))^2 .$$

مسألة 23 (**Gauss Lemma**) نعرّف، في حالة كثير حدود $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ من $\mathbb{Z}[X]$، المقدار: $C(P)=\gcd(a_0,a_1,\ldots,a_n)$، ونقول إنّ P من $\mathbb{Z}[X]$ بدائي primitive إذا وفقط إذا كان $C(P)=1$.

1. أثبت أنّ جداء ضرب كثيري حدود بدائيّين هو كثير حدود بدائي.
2. أثبت أنّ $\forall(P,Q)\in\mathbb{Z}[X]\times\mathbb{Z}[X],\ \ C(PQ)=C(P)C(Q)$.
3. ليكن P من $\mathbb{Z}[X]$ كثير حدود بدائي. أثبت أنّ P غير خزول irreducible في $\mathbb{Q}[X]$ إذا وفقط إذا كان غير خزول في $\mathbb{Z}[X]$، أي إذا لم يكن مساوياً جداء ضرب كثيري حدود من $\mathbb{Z}[X]$ درجة كل منهما أكبر أو تساوي 1.

تطبيق. لتكن $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ أعداداً صحيحة مختلفة مثنى مثنى. أثبت أنّ كثير الحدود $P(X)=\prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k)-1$ غير خزول في $\mathbb{Q}[X]$.

مسألة 24 (Eisenstein's irrecucibility Criterion). ليكن $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ كثير حدود أمثاله أعداد صحيحة. نفترض أنّه يوجد عددٌ أوّلي p يحقّق الخواص الآتية:

- في حالة $0\le k<n$ لدينا $p\mid a_k$.
- $p\nmid a_n$.
- $p^2\nmid a_0$.

عندئذ يكون $P(X)$ غير خزول irreducible في $\mathbb{Q}[X]$، أي لا يمكن تفريق $P(X)$ إلى جداء ضرب كثيرّي حدود غير ثابتين وأمثالهما من $\mathbb{Q}$.

تطبيق. إذا كان p عدداً أوّلياً كان كثير الحدود $P(X)=1+X+\cdots+X^{p-1}$ غير خزول في غير خزول في $\mathbb{Q}[X]$.

تعميم. ليكن $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ كثير حدود أمثاله أعداد صحيحة. نفترض أنّه يوجد عددٌ أوّلي p، وعددطبيعي q من $\{1,\ldots,n\}$ يحقّق الخواص الآتية:

- في حالة $0\le k<q$ لدينا $p\mid a_k$.
- $p\nmid a_q$.
- $p^2\nmid a_0$.

عندئذ يوجد كثير حدود غير خزول $Q(X)$ في $\mathbb{Z}[X]$، يقسم $P(X)$ ويحقّق $\deg Q\ge q$.

تطبيق. أياً كان العدد الطبيعي $n\ge 2$ فكثير الحدود $P_n(X)=X^n+5X^{n-1}+3$ غير خزول في $\mathbb{Q}[X]$.

مسألة 25. ليكن $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ كثير حدود أمثاله أعداد صحيحة. نفترض أنّ $P(0)=p$ عددٌ أوليّ وأنّ $p>|a_n|+|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|$. أثبت أنّ $P(X)$ غير خزول في $\mathbb{Q}[X]$.

مسألة 26 أوجد جميع كثيرات الحدود $P(x)$ التي أمثالها أعداد صحيحة، والتي تحقّق أنّه مهما كان العددان الحقيقيان s و t، إذا كان $P(s)$ و $P(t)$ عددين صحيحين كان $P(st)$ عدداً صحيحاً أيضاً.

مسألة 27 في حالة متتالية عددية $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$، وعدد طبيعي $k\ge 1$. نقول إنّ $\mathbf{a}$ متتالية "**k-متوازنة**" إذا كانت المجاميع الآتية متساوية:

$$\begin{array}{l} a_1+a_{1+k}+a_{1+2k}+\cdots\\ a_2+a_{2+k}+a_{2+2k}+\cdots\\ \vdots\\ a_k+a_{2k}+a_{3k}+\cdots \end{array}$$

نتأمّل متتالية $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_{50})$ ونفترض أنّها k-متوازنة في حالة $k\in\{3,5,7,11,13,17\}$. أثبت أن جميع الأعداد $(a_i)_{1\le i\le 50}$ صفريّة.

مسألة 28 نتأمّل تابعاً $f:\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ يحقّق الشروط الآتية:

- $f(0,k)=1$ في حالة $k\in\{0,1\}$.
- $f(0,k)=0$ في حالة $k\notin\{0,1\}$.
- $f(n,k)=f(n-1,k)+f(n-1,k-2n)$ في حالة $n\ge 1$ و k من $\mathbb{Z}$.

احسب $\displaystyle\sum_{k=0}^{\binom{2019}{2}} f(2018,k)$.

مسألة 29 في حالة $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$، نضع $\Delta(a,b,c)=\max\big(|a-b|,|b-c|,|c-a|\big)$. نقول إنّ الثلاثية (a,b,c) **ظريفة** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

$$\forall x\in[0,1],\quad -1\le ax^2+bx+c\le 1$$

عيّن أصغر ثابت M يحقّق $\Delta(a,b,c)\le M$ وذلك مهما كانت الثلاثيّة الظريفة (a,b,c).

مسألة 30 نفترض وجود أربعة كثيرات حدود $A(X)$ و $B(X)$ و $C(X)$ و $D(X)$ تُحقّق

$$A(X^5)+XB(X^5)+X^2C(X^5)=(1+X+X^2+X^3+X^4)D(X^5)$$

احسب $A(1)$.

مسألة 31 لتكن $P(X)$ كثير حدود **واحدي** أمثاله أعداد صحيحة. نفترض أنّ جميع جذوره العقدية تقع في القرص $\mathcal{D}=\bar{D}(0,1)=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq 1\}$. أثبت أن جذور $P(X)$ هي جذور للواحد، واستنتج وجود عددين طبيعيين موجبين تماماً p و q بحيث $P(X)\mid(X^p-1)^q$.

مسألة 32 ليكن كثيرا الحدود $P(X)$ و $Q(X)$ من $\mathbb{C}[X]$، نفترض أنّ $\deg P=\deg Q=n\geq 1$، وأنّ لكثيري الحدود $P(X)$ و $Q(X)$ من $\mathbb{C}[X]$ مجموعة الجذور ذاتها، وكذلك أنّ لكثيري الحدود $P(X)-1$ و $Q(X)-1$ مجموعة الجذور ذاتها. أثبت أنّ $P(X)=Q(X)$.

مسألة 33 –**ذات قيمة نظرية**– ليكن n و m عددين طبيعيين موجبين تماماً، وليكن a عدداً من $\mathbb{C}^*$. نعرّف $\delta=\gcd(n,m)$ و $\mu=\operatorname{lcm}(n,m)$. أثبت أنّ

$$\gcd(X^n-a^n,X^m-a^m)=X^\delta-a^\delta$$

واستنتج أنّ $(X^n-a^n)(X^m-a^m)$ يقسم $(X^\delta-a^\delta)(X^\mu-a^\mu)$.

مسألة 34 ليكن P كثير حدود من الدرجة n أمثاله أعداد صحيحة أي $P\in\mathbb{Z}[X]$. وليكن $N=\gcd(P(0),P(1),\ldots,P(n))$. أثبت أنّ

$$\forall m\in\mathbb{Z},\quad N\mid P(m)$$

مسألة 35 لتكن a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية تحقّق $a+b+c=0$. أثبت صحة التكافؤ الآتي

$$\left(a^3+b^3+c^3>0\right)\Leftrightarrow\left(a^5+b^5+c^5>0\right)$$

مسألة 36 كثيرات حدود Tchebychev

1. أثبت أنه يوجد في $\mathbb{R}[X]$ كثير حدود وحيد T_n من الدرجة n، يحقّق، أياً كان العدد الحقيقي θ، العلاقة $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$. ما هو ثابت X^n في T_n؟

   نعرّف أيضاً $U_n=\dfrac{1}{n+1}T'_{n+1}$، ما هي قيمة $U_n(\cos\theta)$ بدلالة θ؟

2. أثبت أنّ كلّاً من T_n و U_n فرديٌّ عندما يكون n فردياً وزوجي عندما يكون n زوجياً.

3. عيّن جذور كلٍّ من T_n و U_n، وأثبت أنها تنتمي جميعاً إلى المجال $]-1,+1[$.

4. أثبت في حالة $1\leq n$، العلاقتين التاليتين:

$$\begin{aligned}T_{n+1}&=XT_n-(1-X^2)U_{n-1}\\U_n&=XU_{n-1}+T_n\end{aligned}$$

5. أثبت أن كثيري الحدود T_n و U_n يحقّقان المعادلتين التفاضليتين الآتيتين:

$$\left(X^2-1\right)T_n''+XT_n'-n^2T_n=0$$ و

$$\left(X^2-1\right)U_n''+3XU_n'-n(n+2)U_n=0$$

ثم احسب أمثال كثير الحدود T_n.

6. أثبت أن كثيري الحدود T_n و U_n يحققان العلاقتين التدريجيتين الآتيتين:

$$T_{n+1}=2XT_n-T_{n-1} \quad \text{حيث} \quad T_0(X)=1, \quad T_1(X)=X\ .$$

$$U_{n+1}=2XU_n-U_{n-1} \quad \text{حيث} \quad U_0(X)=1, \quad U_1(X)=2X\ .$$

مسألة 37 ليكن n عدداً طبيعيّاً موجباً تماماً. أثبت أنّه يوجد كثيرا حدود $P(X)$ و $Q(X)$ يحققان

$$\deg P(X)=n, \quad (P(X))^2-1=(X^2-1)(Q(X))^2\ .$$

كثيرات الحدود

مسألة 21 عيّن جميع كثيرات الحدود ذات الأمثال الحقيقيّة $P(X)$ التي تحقّق الشرط:

$$P(2X^2-1)=\frac{1}{2}(P(X))^2-1 .$$

الحل

لنتأمّل كثير حدود $P(X)$ يحقّق الشرط المعطى:

$$P(2X^2-1)=\frac{1}{2}(P(X))^2-1 \tag{1}$$

- لنلاحظ أوّلاً بتعويض $X=1$ أنّ $P(1)\in\left\{1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}\right\}$.
- أيضاً باشتقاق طرفي العلاقة المعطاة نجد

$$4X\,P'(2X^2-1)=P(X)P'(X) \tag{2}$$

- فإذا عوّضنا مجدداً $X=1$ واستفدنا من كون $P(1)\neq 4$ استنتجنا أنّ $P'(1)=0$.
- بتعويض $X=-1$ في (2) نجد $P(-1)P'(-1)=0$، ولكنّ الافتراض $P(-1)=0$ يقتضي عند التعويض في (1) أنّ $P(1)=-1$ وهذا خُلفٌ. إذن $P'(-1)=0$. أيضاً.

لنعرّف إذن المتتالية $(a_n)_{n\geq 0}$ بوضع $a_n=\cos\left(\dfrac{2\pi}{2^n}\right)$. فيكون مثلاً $a_0=1$ و $a_1=-1$، ... .

- عندئذ نلاحظ أنّه في حالة $n\geq 1$ لدينا

$$P(a_n)=\tfrac{1}{2}(P(a_{n+1}))^2-1 \quad \text{و} \quad 4a_{n+1}P'(a_n)=P(a_{n+1})P'(a_{n+1}) \tag{3}$$

- إذا كان $P(a_{n+1})=0$ عند إحدى قيم n نتج من ذلك أنّ $P(a_n)\in\mathbb{Q}$، وهذا يقتضي بالتدريج أنّ جميع الأعداد $P(a_{n-1})$، ...، $P(a_1)$ تنتمي إلى $\mathbb{Q}$، وهذا تناقضٌ لأنّ $P(1)\notin\mathbb{Q}$. إذن مهما كانت قيمة $n\geq 0$ فلدينا $P(a_n)\neq 0$.
- رأينا أنّ $P'(a_0)=P'(a_1)=0$ لنبرهن بالتدريج أنّ $P'(a_n)=0$ أياً كانت n. في الحقيقة، إذا كان $P'(a_n)=0$ استنتجنا من (3) أنّ $P(a_{n+1})P'(a_{n+1})=0$ ولكن $P(a_{n+1})\neq 0$ إذن يجب أن يكون $P'(a_{n+1})=0$.
- من الواضح أنّ $(a_n)_{n>1}$ متتالية متزايدة تماماً من المجال $[-1,1[$، فحدودها مختلفة، وكثير الحدود P' يقبل جميع حدود هذه المتتالية جذوراً له. فلا بُدّ أن يكون صفريّاً، ومن ثَمّ، يجب أن يكون P ثابتاً يأخذ إحدى القيمتين $1+\sqrt{3}$ أو $1-\sqrt{3}$.

وبالعكس، كثيرا الحدود الثابتان اللذان يأخذان القيمتين $1+\sqrt{3}$ أو $1-\sqrt{3}$ يحقّقان المطلوب. ■

مسألة 22 نتأمّل كثيري حدود واحديين أمثالهما حقيقيّة P و Q يحقّقان $\deg P + \deg Q > 0$. نفترض أنهما يحققان الخاصة الآتية: مهما كان العدد الحقيقي x، إذا كان $P(x)$ مربّع عدد صحيح كان $Q(x)$ مربّع عدد صحيح، وبالعكس، إذا كان $Q(x)$ مربّع عدد صحيح كان $P(x)$ مربّع عدد صحيح أيضاً. أثبت أنّه يوجد كثير حدود أمثاله حقيقيّة بحيث

$$P(X)Q(X) = (R(X))^2 .$$

الحل

لدينا فرضاً

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$$
$$Q(X) = X^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_0$$

حيث $n + m > 0$. بمناقشة بسيطة نتركها للقارئ نرى أنّ $n + m > 0$ يكافئ $n > 0$ و $m > 0$ في حالتنا.

في حالة كثير حدود S نرمز بالرمز $\mathcal{Z}_S = \{x \in \mathbb{R} : S(x) = 0\}$ إلى مجموعة جذوره الحقيقية. لنعرّف إذن العدد

$$\alpha = \max(\mathcal{Z}_P \cup \mathcal{Z}_{P'} \cup \mathcal{Z}_Q \cup \mathcal{Z}_{Q'})$$

عندئذ نستنتج أنّ كلّاً من التوابع $x \mapsto P(x)$ و $x \mapsto P'(x)$ و $x \mapsto Q(x)$ و $x \mapsto Q'(x)$ موجب تماماً على المجال $]\alpha, +\infty[$. وعليه يكون التابعان

$$f :]\alpha, +\infty[\;\rightarrow\;]P(\alpha), +\infty[, x \mapsto P(x)$$
$$g :]\alpha, +\infty[\;\rightarrow\;]Q(\alpha), +\infty[, x \mapsto Q(x)$$

تقابلين متزايدين تماماً.

لنعرّف إذن $k_0 = 1 + \left\lfloor \sqrt{P(\alpha)} \right\rfloor$ ثُمّ لنعرّف، في حالة $k \geq k_0$، المقدار $r_k = f^{-1}(k^2)$. لمّا كان $f(r_{k_0}) = k_0^2$ استنتجنا أنّ $g(r_{k_0})$ هو أيضاً مربّع عدد صحيح، فيوجد $m_0 \geq 0$ بحيث $g(r_{k_0}) = m_0^2$.

لنبرهن بالتدريج على العدد الطبيعي t أنّ $g(r_{k_0+t}) = (m_0 + t)^2$.

- في الحقيقة. هذه الخاصّة محقّقة في حالة $t = 0$.
- لنفترض إذن أنها صحيحة في حالة $t = \ell$. أي $g(r_{k_0+\ell}) = (m_0 + \ell)^2$.

لمّا كان $f(r_{k_0+\ell+1}) = (k_0 + \ell + 1)^2$ استنتجنا أنّ $m = \sqrt{g(r_{k_0+\ell+1})} \in \mathbb{N}$ ولكنّ التابع g متزايدٌ تماماً إذن $m > \sqrt{g(r_{k_0+\ell})} = m_0 + \ell$. فإذا كان على سبيل الجدل $m > m_0 + \ell + 1$ وجدنا عدداً حقيقياً $s \in]r_{k_0+\ell}, r_{k_0+\ell+1}[$ بحيث $g(s) = (m_0 + \ell + 1)^2$. وعندها يجب أن يكون $f(s)$ مربعاً كاملاً محصوراً تماماً بين العددين $f(r_{k_0+\ell}) = (k_0 + \ell)^2$ و $f(r_{k_0+\ell+1}) = (k_0 + \ell + 1)^2$ وهذا مستحيل. إذن يجب أن يكون $m = m_0 + \ell + 1$، ومن ثَمّ $g(r_{k_0+\ell+1}) = (m_0 + \ell + 1)$. وهكذا يكتمل الإثبات بالتدريج.

نستنتج مما سبق أنّ و $P(r_k)=k^2$ و $Q(r_k)=(k+m_0-k_0)^2$ وذلك مهما كان $k\geq k_0$. فإذا رمزنا $s=m_0-k_0$، استنتجنا من المساواة

$$(k+s)^2+k^2-s^2=2k(k+s)$$

أنّ

$$\Big(Q(r_k)+P(r_k)-s^2\Big)^2=4P(r_k)Q(r_k)$$

فإذا عرّفنا

$$R(X)=\tfrac{1}{2}\Big(P(X)+Q(X)-s^2\Big)$$

استنتجنا مما سبق أنّ $(R(X))^2-P(X)Q(X)$ ينعدم عند عدد لا نهائي من القيم هي حدود المتتالية $(r_k)_{k\geq k_0}$. فلا بُدّ أن يكون كثير الحدود الصفري. أي

$$P(X)Q(X)=(R(X))^2 .$$

وبذا يكتمل الحلّ. ■

يعتمد العديد من المسائل المتعلّقة بكثيرات الحدود على التوطئة الآتية، وهي خاصة مهمّة تعود إلى غاوس $Gau\beta$ **. لقد وضعتها في ما يأتي بصيغة مسألة.**

مسألة 23 (**خاصة نظرية مهمة Gauss Lemma**) نعرّف، في حالة كثير حدود $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ من $\mathbb{Z}[X]$، المقدار

$$C(P)=\gcd(a_0,a_1,\ldots,a_n)$$

ونقول إنّ P من $\mathbb{Z}[X]$ بدائي primitive إذا وفقط إذا كان $C(P)=1$.

1. أثبت أنّ جداء ضرب كثيري حدود بدائيّين هو كثير حدود بدائي.
2. أثبت أنّ $\forall(P,Q)\in\mathbb{Z}[X]\times\mathbb{Z}[X],\ \ C(P\,Q)=C(P)\,C(Q)$.
3. ليكن P من $\mathbb{Z}[X]$ كثير حدود بدائي. أثبت أنّ P غير خزول irreducible في $\mathbb{Q}[X]$ إذا وفقط إذا كان غير خزول في $\mathbb{Z}[X]$، أي إذا لم يكن مساوياً جداء ضرب كثيري حدود من $\mathbb{Z}[X]$ درجة كل منهما أكبر أو تساوي 1.

تطبيق. لتكن $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ أعداداً صحيحة مختلفة مثنى مثنى. أثبت أنّ كثير الحدود $P(X)=\prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k)-1$ غير خزول في $\mathbb{Q}[X]$.

تعتبر هذه الخاصّة مقبولة في الأولمبياد.

الحل

1. لنفترض أنّ $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ و $Q=\sum_{k=0}^{m}b_kX^k$ كثيرا حدود من $\mathbb{Z}[X]$ يُحقّقان

$$C(P)=C(Q)=1$$

ولنعرّف $R=PQ=\sum_{k=0}^{n+m}c_kX^k$. ثُمّ لنفترض على سبيل الجدل أنّ $C(PQ)\neq 1$.

عندئذ يوجد عددٌ أوّلي p يقسم $C(PQ)$. لمّا كان $p \mid a_0b_0$ أمكننا أن نفترض دون الإخلال بعموميّة الإثبات أنّ $p \mid a_0$، عندئذ نعرّف

$$\kappa = \max\left\{j \le n : p \mid a_j\right\}$$

إنّ $\kappa < n$ وإلاّ قَسَمَ p العددَ $C(P)$ وهذا يناقض كون $C(P) = 1$. لنتأمّل إذن $c_{\kappa+1}$:

$$c_{\kappa+1} = a_0b_{\kappa+1} + a_1b_\kappa + \cdots + a_\kappa b_1 + a_{\kappa+1}b_0$$

إنّ p يقسم الأعداد $c_{\kappa+1}$ و $a_0, a_1, \ldots, a_\kappa$ فهو يقسم $a_{\kappa+1}b_0$ ولكنّ p أوّلي مع $a_{\kappa+1}$ استناداً إلى تعريف κ، إذن لا بدَّ أن يقسم p العدد b_0. لنعرّف إذن

$$\tau = \max\left\{j \le m : p \mid b_j\right\}$$

إنّ $\tau < m$ وإلاّ قَسَمَ p العددَ $C(Q)$ وهذا يناقض كون $C(Q) = 1$.

لنتأمّل إذن الدليل $\sigma = \tau + \kappa + 2$ والمقدار c_σ، نعلم أنّ

$$c_\sigma = \sum_{i+j=\sigma} a_ib_j = \underbrace{\sum_{i=0}^{\kappa} a_ib_{\sigma-j}}_{i\le\kappa\Rightarrow p\mid a_i} + a_{\kappa+1}b_{\tau+1} + \underbrace{\sum_{j=0}^{\tau} a_{\sigma-i}b_j}_{j\le\tau\Rightarrow p\mid b_j}$$

ولمّا كان $p \mid c_\sigma$، استنتجنا أنّ $p \mid a_{\kappa+1}b_{\tau+1}$. فإمّا أن يكون $p \mid a_{\kappa+1}$ وهذا يناقض تعريف κ، أو أن يكون $p \mid b_{\tau+1}$ وهذا يناقض تعريف τ. إذن افتراض $C(PQ) \ne 1$ خطأ، ولا بُدّ أن يكون $C(PQ) = 1$.

2. ليكن P كثير حدود من $\mathbb{Z}[X]$. عندئذ بقسمة أمثال P على قاسمها المشترك الأعظم وهو $C(P)$ نحصل على كثير حدود بدائي P^*، فيكون لدينا $P = C(P)P^*$، و P^* بدائي. فإذا كان P و Q كثيري حدود من $\mathbb{Z}[X]$، كان $PQ = C(P)C(Q)P^*Q^*$، واستناداً إلى ما أثبتناه في 1. يكون P^*Q^* بدائيّاً، إذن $C(PQ) = C(P)C(Q)$.

3. ليكن P كثير حدود من $\mathbb{Z}[X]$ ولنفترض أنّ $C(P) = 1$. من الواضح أنّ كون P غير خزول في $\mathbb{Q}[X]$ يقتضي أنّه غير خزول في $\mathbb{Z}[X]$. لنثبت العكس. نفترض أنّ $P = P_1P_2$ حيث $\deg P_1 \ge 1$ و $\deg P_2 \ge 1$ و P_1 و P_2 من $\mathbb{Q}[X]$. فإذا عرّفنا العدد α_k بأنّه المضاعف المشترك الأصغر لمقامات ثوابت كثير الحدود P_k، في حالة $k = 1$ و $k = 2$، انتمى كثيرا الحدود $T_1 = \alpha_1P_1$ و $T_2 = \alpha_2P_2$ إلى $\mathbb{Z}[X]$. وكان لدينا $T_1T_2 = \alpha_1\alpha_2P$. ولأنّ P بدائي استنتجنا أنّ $C(T_1)C(T_2) = \alpha_1\alpha_2$. ولكن $T_1 = C(T_1)T_1^*$ و $T_2 = C(T_2)T_2^*$ وكثيرا الحدود T_1^* و T_2^* ينتميان إلى $\mathbb{Z}[X]$. نستنتج إذن أنّ $P = T_1^*T_2^*$، أي إنّ P خزولٌ في $\mathbb{Z}[X]$.

تطبيق. لنفترض أنّ $P(X)$ خزولٌ في $\mathbb{Q}[X]$، فهو خزولٌ في $\mathbb{Z}[X]$. فيوجد $A(X)$ و $B(X)$ من $\mathbb{Z}[X]$ غير ثابتين ويحقّقان $P(X) = A(X)B(X)$. وعلى الخصوص $A(\lambda_i)B(\lambda_i) = -1$ في حالة $1 \le i \le n$، ولكن $A(\lambda_i)$ و $B(\lambda_i)$ عددان صحيحان، فالخاصة السابقة تقتضي أن يكون $A(\lambda_i) + B(\lambda_i) = 0$ في حالة $1 \le i \le n$. فكثير الحدود $A + B$ الذي درجته أصغر تماماً من n يقبل n جذراً، هو إذن صفري. ومنه $P(X) = -(A(X))^2$ وهذا يقودنا إلى تناقض عند مقارنة أمثال X^n في الطرفين. ∎

سنبرهن فيما يأتي، بصيغة مسألة، خاصّة معروفة باسم معيار عدم قابلية الاختزال لأيزنشتاين Eisenstein، وهو يعطي شرطاً كافياً على كثير حدود أمثاله أعداد صحيحة، ليكون **غير** قابل للتفريق إلى جداء ضرب كثيري حدود غير ثابتين وأمثالهما من $\mathbb{Q}$.

مسألة 24 (Eisenstein's irrecucibility Criterion). ليكن $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ كثير حدود أمثاله أعداد صحيحة. نفترض أنّه يوجد عددٌ أوّلي p يحقّق الخواص الآتية:

- في حالة $0\le k<n$ لدينا $p\mid a_k$.
- $p\nmid a_n$.
- $p^2\nmid a_0$.

عندئذ يكون $P(X)$ غير خزول irreducible في $\mathbb{Q}[X]$، أي لا يمكن تفريق $P(X)$ إلى جداء ضرب كثيري حدود غير ثابتين وأمثالهما من $\mathbb{Q}$.

تطبيق. إذا كان p عدداً أوّلياً كان كثير الحدود $P(X)=1+X+\cdots+X^{p-1}$ غير خزول في غير خزول في $\mathbb{Q}[X]$.

الحل

لنفترض على سبيل الجدل أنّه يوجد $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ يحقّق شروط المعيار، ومع ذلك فإنّ $P(X)$ خزول في $\mathbb{Q}[X]$. عندئذ استناداً إلى توطئة غاوس، يكون $P(X)$ خزولاً في $\mathbb{Z}[X]$، أي يوجد كثيرا حدود $G(X)$ و $H(X)$ غير ثابتين، وأمثالهما أعداد صحيحة ويحقّقان $P(X)=G(X)H(X)$. لنضع إذن

$$G(X)=c_rX^r+\cdots+c_1X+c_0$$
$$H(X)=d_sX^s+\cdots+d_1X+d_0$$

حيث $r\ge 1$ و $s\ge 1$ و $n=r+s$. لمّا كان $a_0=c_0d_0$ استنتجنا من كون $p\mid a_0$ و $p^2\nmid a_0$ أنّ العدد p يقسم أحد العددين c_0 و d_0 ولا يقسم الآخر. دون الإقلال من عمومية الإثبات يمكننا أن نفترض أنّ

$$p\mid c_0 \quad \text{و} \quad p\nmid d_0$$

ولأنّ $a_n=c_rd_s$ و $p\nmid a_n$ استنتجنا أنّ $p\nmid c_r$. إذن يمكننا أن نعرّف

$$\ell=\min\{k\le r : p\nmid c_k\}$$

فيكون لدينا $1\le \ell\le r=n-s<n$، و $p\mid c_k$ في حالة $k\in\{0,\ldots,\ell-1\}$. الآن

$$a_\ell=c_\ell d_0+c_{\ell-1}d_1+\cdots+c_0d_\ell$$

أو

$$c_\ell d_0=a_\ell-(c_{\ell-1}d_1+\cdots+c_0d_\ell)$$

ولكن جميع حدود الطرف الأيمن تقبل القسمة على p، إذن $p\mid c_\ell d_0$، وهذا تناقض لأنّ $p\nmid c_r$ و $p\nmid d_0$.

ويكتمل الإثبات. ■

تطبيق. من الواضح أنّه لا يمكن تطبيق المعيار مباشرة. ولكن هناك فكرة يمكن دوماً اللجوء إليها، وهي إجراء تغيير في المتحوّل، فمثلاً في حالتنا إذا وضعنا $X = Y + 1$ صار لدينا

$$P(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1} = \frac{(1+Y)^p - 1}{Y} = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} Y^{k-1} = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k+1} Y^k = Q(Y)$$

حيث $Q(Y) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k Y^k$ و $a_k = \binom{p}{k+1}$. وبملاحظة أنّ $\binom{p}{k} \equiv 0 \mod p$ في حالة $1 \leq k \leq p-1$ نستنتج مباشرة استناداً إلى معيار أيزنشتاين أنّ Q، ومن ثَمّ P، غير خزول في $\mathbb{Q}[X]$. ■

تعميم. ليكن $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ كثير حدود أمثاله أعداد صحيحة. نفترض أنّه يوجد عددٌ أوّلي p، وعددطبيعي q من $\{1,\ldots,n\}$ يحقّق الخواص الآتية:

- في حالة $0 \leq k < q$ لدينا $p \mid a_k$.
- $p \nmid a_q$.
- $p^2 \nmid a_0$.

عندئذ يوجد كثير حدود غير خزول $Q(X)$ في $\mathbb{Z}[X]$، يقسم $P(X)$ ويحقّق $\deg Q \geq q$.

الإثبات

سنتبع أسلوباً آخر في الإثبات. يمكن تفريق $P(X)$ إلى جداء ضرب كثيرات حدود غير خزولة في $\mathbb{Z}[X]$. جداء ضرب حدودها الثابتة يساوي a_0 الذي يقبل القسمة على p، ولكنه لا يقبل القسمة على p^2. إذن واحدٌ وواحد فقط من كثيرات الحدود هذه يقبل حدّه الثابت القسمة على p، وليكن $G(X)$. إذن

$$P(X) = G(X)H(X) \tag{1}$$

حيث $G(X)$ غير خزول في $\mathbb{Z}[X]$، و $p \mid G(0)$ و $p \nmid H(0)$.

لنتأمّل المساواة (1) في $\mathbb{F}_p[X] = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$، ولنكتب $\tilde{P}$ و $\tilde{G}$ و $\tilde{H}$ دلالة على كثيرات الحدود P و G و H في $\mathbb{F}_p[X]$. استناداً إلى الفرض نعلم أنّ X^q يقسم $\tilde{P}(X)$، ولكنّ $\gcd(X, \tilde{H}(X)) = 1$ لأنّ $\tilde{H}(0) \neq 0 \mod p$. إذن $\gcd(X^q, \tilde{H}(X)) = 1$، ومن ثَمّ $X^q \mid \tilde{G}(X)$، ولكن $\tilde{G}(X) \neq 0$ وإلّا نتج من ذلك أنّ $\tilde{P}(X) = 0$ وهذا يناقض كون $a_q \neq 0 \mod p$، إذن $\deg \tilde{G}(X) \geq \deg X^q = q$، وعليه $\deg G(X) \geq q$. ■

تطبيق. أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 2$ فكثير الحدود $P_n(X) = X^n + 5X^{n-1} + 3$ غير خزول في $\mathbb{Q}[X]$. في الحقيقة، بتطبيق التعميم السابقة في حالة $p = 3$ و $q = n-1$، نستنتج أنّ $P_n(X)$ يقبل قاسماً غير خزول $G(X)$ يحقّق $\deg G(X) \geq n-1$. فإذا كان $\deg G(X) = n-1$، استنتجنا أنّ $P(X)$ يقبل قاسماً في $\mathbb{Z}[X]$ من الدرجة الأولى، فله جذرٌ في $\mathbb{Q}$، وليكن α/β حيث $(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ و $\gcd(\alpha,\beta) = 1$. من $\alpha^n + 5\alpha^{n-1}\beta + 3\beta^n = 0$ نستنتج أنّ $\beta \mid \alpha^n$ ولكن $\gcd(\alpha,\beta) = 1$، إذن $\beta = 1$. ومن ثَمّ $(\alpha+5)\alpha^{n-1} = -3$، وهذا يقتضي بالقياس 2 أنّ $\alpha(1+\alpha) \equiv 1 \mod 2$ وهذا خُلفٌ. إذن يجب أن يكون $\deg G(X) = n = \deg P(X)$، ومن ثَمّ $P(X)$ غير خزول في $\mathbb{Z}[X]$. ■

مسألة 25. ليكن $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ كثير حدود أمثاله أعداد صحيحة. نفترض أنّ $P(0)=p$ عددٌ أوليّ وأنّ $p>|a_n|+|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|$. أثبت أنّ $P(X)$ غير خزول في $\mathbb{Q}[X]$.

الحل

في الحقيقة، إذا افترضنا على سبيل الجدل أنّ $P(X)=G(X)H(X)$ حيث H و G كثيرا حدود غير ثابتين من $\mathbb{Z}[X]$. كان لدينا $G(0)H(0)=p$، ولأنّ p أوّلي استنتجنا أنّ أحد العددين $|H(0)|$ أو $|G(0)|$ يساوي 1، يمكننا إذن أن نفترض مثلاً أنّ $G(0)=1$. وإذا كان الحدّ المُسَيْطِر في $G(X)$ يساوي αX^r كانت طويلة جداء ضرب الجذور العقدية لكثير الحدود $G(X)$ مساوية $1/|\alpha|$ وهو عدد أصغر أويساوي 1. إذن يقبل $G(X)$ جذراً عقدياً z_0، يحقّق $|z_0|\leq 1$، وهذا يقتضي أن يكون $P(z_0)=0$، أي

$$p=-\sum_{k=1}^{n}a_kz_0^k$$

ولكنّ هذا يقودنا إلى

$$p=\left|\sum_{k=1}^{n}a_kz_0^k\right|\leq\sum_{k=1}^{n}|a_k||z_0|^k\leq\sum_{k=1}^{n}|a_k|$$

مما يناقض الفرْض. إذن $P(X)$ غير خزول. ■

مسألة 26 أوجد جميع كثيرات الحدود $P(x)$ التي أمثالها أعداد صحيحة، والتي تحقّق أنّه مهما كان العددان الحقيقيان s و t، إذا كان $P(s)$ و $P(t)$ عددين صحيحين كان $P(st)$ عدداً صحيحاً أيضاً.

الحل

الجواب. كثيرات الحدود المطلوبة هي كثيرات الحدود من الشكل sX^n+k حيث $s\in\{-1,+1\}$ و $k\in\mathbb{Z}$.

من الواضح أن كثيرات الحدود من هذا الشكل تحقّق الخاصّة المعطاة، علينا إذن إثبات العكس.

ليكن إذن $P_1(X)=\sum_{k=0}^{n}b_kX^k$ كثير حدود غير ثابت أمثاله $(b_0,\ldots,b_n)$ أعداد صحيحة و $b_n\neq 0$. ولنفترض أنّ $P_1(X)$ يحقّق الخاصّة المعطاة. عندئذ يحقّق $P(X)=\operatorname{sgn}(b_n)(P_1(X)-b_0)$ أيضاً الخاصة المعطاة، وفوق ذلك يكون $P(0)=0$ وأمثال الحدّ المسيطِر في P موجبة تماماً. أي

$$P(X)=a_nX^n+\cdots+a_1X,\quad a_n>0$$

في حالة كثير حدود S نرمز بالرمز $\mathcal{Z}_S=\{x\in\mathbb{R}:S(x)=0\}$ إلى مجموعة جذوره الحقيقيّة. لنعرّف إذن العدد $\alpha=\max(\mathcal{Z}_P,\mathcal{Z}_{P'})$ فيكون $x\mapsto P(x)$ متزايداً تماماً على $[\alpha,+\infty[$ ويعرّف تقابلاً من $[\alpha,+\infty[$ إلى $[P(\alpha),+\infty[$.

لنختر عدداً أوّلياً p يحقّق

$$p>\max\left(P(\alpha),|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|\right)\tag{1}$$

عندئذ يوجد $t \geq \alpha$ يحقّق $P(t) = p$. فيكون لدينا استناداً إلى الفرضْ $P(2t) \in \mathbb{Z}$. إذن ينتمي كثيرا الحدود $A(X) = P(X) - p$ و $B(X) = P(2X) - P(2t)$ إلى $\mathbb{Z}[X]$ ، (أي إنّ أمثالهما أعداد صحيحة) .

- إنّ كثير الحدود $A(X)$ من $\mathbb{Z}[X]$ غير خزول في $\mathbb{Q}[X]$.

هذا نتيجة مسألة سابقة. في الحقيقة، إذا افترضنا على سبيل الجدل أنّ $A(X) = G(X)H(X)$ حيث H و G كثيرا حدود غير ثابتين من $\mathbb{Z}[X]$. كان لدينا $G(0)H(0) = -p$ ، ولأنّ p أوّلي استنتجنا أنّ أحد العددين $\lvert H(0)\rvert$ أو $\lvert G(0)\rvert$ يساوي 1، يمكننا إذن أن نفترض مثلاً أنّ $G(0) = 1$. وإذا كان الحدّ المُسَيْطِر في $G(X)$ يساوي αX^r كانت طويلة جداء ضرب الجذور العقدية لكثير الحدود $G(X)$ مساوية $1/\lvert\alpha\rvert$ وهو عدد أصغر أويساوي 1. إذن يقبل $G(X)$ جذراً عقدياً z_0 ، يحقّق $\lvert z_0\rvert \leq 1$ ، وهذا يقتضي أن يكون $A(z_0) = 0$ ، أي

$$p = \sum_{k=1}^{n} a_k z_0^k$$

وهذا يقودنا إلى

$$p = \left\lvert \sum_{k=1}^{n} a_k z_0^k \right\rvert \leq \sum_{k=1}^{n} \lvert a_k\rvert \lvert z_0\rvert^k \leq \sum_{k=1}^{n} \lvert a_k\rvert$$

مما يناقض الفرْض. إذن $A(X)$ غير خزول في $\mathbb{Q}[X]$.

- إنّ $A(X)$ يقسم $B(X)$.

لنعرّف $R(X) = \gcd\big(A(X), B(X)\big)$ هذا كثير حدود أمثاله أعداد عادية أي ينتمي إلى $\mathbb{Q}[X]$. ولأنّ $A(t) = B(t) = 0$ استنتجنا أنّ $R(t) = 0$ ومنه $\deg R \geq 1$. وعليه يوجد كثير حدود $S(X)$ في $\mathbb{Q}[X]$ يحقّق $A(X) = R(X)S(X)$.

ليكن r المضاعف المشترك الأصغر لمقامات أمثال $R(X)$ ، وليكن s المضاعف المشترك الأصغر لمقامات أمثال $S(X)$ ، عندئذ ينتمي كثيرا الحدود $R_1(X) = rR(X)$ و $S_1(X) = sS(X)$ إلى $\mathbb{Z}[X]$ ويكون من ثَمّ $rR(X) = \mathcal{C}(R_1)R_1^*(X)$ و $sS(X) = \mathcal{C}(S_1)S_1^*(X)$ حيث $R_1^*(X)$ و $S_1^*(X)$ كثيرا حدود بدائيين من $\mathbb{Z}[X]$. ولكن

$$rsA(X) = \mathcal{C}(R_1)\mathcal{C}(S_1)R_1^*(X)S_1^*(X)$$

إذن

$$rs\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(R_1)\mathcal{C}(S_1)$$

ولكن $\mathcal{C}(A) = 1$ لأنّ الحدّ الثابت في A عددٌ أوّلي. إذن $rs = \mathcal{C}(R_1)\mathcal{C}(S_1)$ ويمكن الاختصار على هذا الثابت لنجد

$$A(X) = R_1^*(X)S_1^*(X)$$

حيث $R_1^*(X)$ و $S_1^*(X)$ ينتميان إلى $\mathbb{Z}[X]$ و $\deg R_1^*(X) \geq 1$. ولكنّ $A(X)$ غير خزول إذن $A = \pm R_1^* \mid B$.

ولكن لكثيري الحدود A و B الدرجة نفسها، فلا بُدَّ أن يكون هناك عدد حقيقي λ يحقّق $B(X) = \lambda A(X)$ أو

$$P(2X) - P(2t) = \lambda P(X) - \lambda p$$

وبمقارنة أمثال الحدّ المسيْطِر نجد أنّ $a_n 2^n = \lambda a_n$، إذن

$$P(2X) - P(2t) = 2^n \left(P(X) - p \right)$$

وبمقارنة أمثال X^k في حالة $1 \leq k \leq n-1$ نستنتج أنّ $a_k = 0$ في حالة $1 \leq k \leq n-1$. إذن وصلنا إلى النتيجة أنّ $P(X) = a_n X^n$ حيث a_n عددٌ طبيعي موجب.

وأخيراً، بوضع $t = s = a_n^{-1/n}$ نلاحظ أنّ $P(t) = P(s) = 1$ ومن ثَمَّ $P(ts) \in \mathbb{Z}$ وهذا يعني أنّ $(1/a_n) \in \mathbb{N}$، إذن $a_n = 1$. وعليه يجب أن يكون $P(X) = X^n$، أي

$P_1(X) = sX^n + k$ حيث $s \in \{-1,+1\}$ و $k \in \mathbb{Z}$.

وبالعكس، لقد أشرنا في البداية أنّ كلّ كثير حدود من الشكل $sX^n + k$ حيث $s \in \{-1,+1\}$ و $k \in \mathbb{Z}$، يحقّق وضوحاً الخاصّة المعطاة. ◼

مسألة 27 في حالة متتالية عددية $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$، وعدد طبيعي $k \geq 1$. نقول إنّ $\mathbf{a}$ متتالية "**k-متوازنة**" إذا كانت المجاميع:

$$\begin{array}{l} a_1 + a_{1+k} + a_{1+2k} + \cdots \\ a_2 + a_{2+k} + a_{2+2k} + \cdots \\ \vdots \\ a_k + a_{2k} \ \ + a_{3k} \ \ + \cdots \end{array}$$

جميعها متساوية.

نتأمّل متتالية $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{50})$ ونفترض أنّها k-متوازنة في حالة $k \in \{3,5,7,11,13,17\}$. أثبت أن جميع الأعداد $(a_i)_{1 \leq i \leq 50}$ صفريّة.

الحل

الفكرة هنا هي في استعمال كثير الحدود المولّد generating polynomial الموافق للمتتالية $\mathbf{a}$.

$$P(X) = \sum_{j=0}^{49} a_{j+1} X^j = a_1 + a_2 X + a_3 X^2 + \cdots + a_{50} X^{49}$$

إذا كانت المتتالية $\mathbf{a}$ متتالية k-متوازنة، كانت المجاميع $\left(\sum_{j \geq 0} a_{1+r+kj} \right)_{r \in \{0,1,\ldots,k-1\}}$ متساوية، وكان مجموعها معاً يساوي $P(1) = \sum_{j \geq 0} a_j$. إذن لدينا

$$S_r \triangleq \sum_{j \geq 0} a_{1+r+kj} = \frac{P(1)}{k}, \quad r \in \{0,1,\ldots,k-1\}$$

لنتأمّل $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{k}\right)$ وهو جذر من المرتبة k للواحد. عندئذ في حالة $1 \leq \ell < k$ لدينا

$$
\begin{aligned}
P(\omega^\ell) &= \sum_{j\geq 0} a_{j+1}\omega^{\ell j} = \sum_{t\geq 0}\sum_{r=0}^{k-1} a_{j+1}\omega^{\ell(r+tk)} : j = r+tk\\
&= \sum_{r=0}^{k-1}\sum_{t\geq 0} a_{r+1+tk}\omega^{\ell r} = \sum_{r=0}^{k-1}\left(\sum_{t\geq 0} a_{r+1+tk}\right)\omega^{\ell r}\\
&= \sum_{r=0}^{k-1} S_r\omega^{\ell r} = \frac{P(1)}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\omega^{\ell r} = \frac{P(1)}{k}\frac{\omega^{\ell k}-1}{\omega^\ell - 1} = 0
\end{aligned}
$$

إذن جميع الأعداد $\mathcal{Z}_k = \left\{e^{2\pi i\ell/k} : 1\leq \ell \leq k-1\right\}$ هي جذور لكثير الحدود $P(X)$. المجموعات $\{\mathcal{Z}_k\}_{k\in\{3,5,7,11,13,17\}}$ منفصلة مثنى مثنى (لماذا؟) إذن

$$
\operatorname{card}\left(\cup \mathcal{Z}_k\right) = 2+4+6+10+12+16 = 50
$$

ولكثير الحدود $P(X)$ الذي درجته أصغر أو تساوي 49 عدد من الجذور يفوق درجته. إذن $P(X)\equiv 0$. فأمثال كثير الحدود $P(X)$ جميعها صفرية. وهي النتيجة المطلوبة. ■

مسألة 28 نتأمّل تابعاً $f:\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ يحقّق الشروط الآتية:

- $f(0,k)=1$ في حالة $k\in\{0,1\}$.
- $f(0,k)=0$ في حالة $k\notin\{0,1\}$.
- $f(n,k)=f(n-1,k)+f(n-1,k-2n)$ في حالة $n\geq 1$ و k من $\mathbb{Z}$.

احسب $\displaystyle\sum_{k=0}^{\binom{2019}{2}} f(2018,k)$.

الحل

سنستعمل تقنية التوابع المولّدة genetrating functions. لنتأمّل المجموع الشكليّ

$$
G_n(X) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(n,k)X^k
$$

في حالة n من $\mathbb{Z}_+$. استناداً إلى أوّل خاصتين نرى أنّ $G_0(X)=1+X$، وباستعمال الخاصة الثالثة يمكننا أن نكتب في حالة $n\geq 1$ ما يأتي

$$
\begin{aligned}
G_n(X) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(n,k)X^k = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\big(f(n-1,k)+f(n-1,k-2n)\big)X^k\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(n-1,k)X^k + \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(n-1,k-2n)X^k\\
&= G_{n-1}(X) + X^{2n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(n-1,\underbrace{k-2n}_{m})X^{k-2n}\\
&= G_{n-1}(X) + X^{2n}\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(n-1,m)X^m\\
&= G_{n-1}(X) + X^{2n}G_{n-1}(X) = (1+X^{2n})G_{n-1}(X)
\end{aligned}
$$

إذن

$$G_n(X) = (1 + X^{2n})G_{n-1}(X), \quad n \geq 1$$

وعليه نرى أنّ

$$G_n(X) = (1 + X)\prod_{k=1}^{n}(1 + X^{2k}), \quad n \geq 1$$

إذن G_n هو كثير حدود درجته تعطى بالصيغة

$$\deg G_n = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} k = 1 + n + n^2 = 1 + 2\binom{n+1}{2}$$

نلاحظ أيضاً أنّ G_n متناظر، بمعنى أنّه يحقّق الخاصة

$$X^{1+n+n^2} G_n\left(\frac{1}{X}\right) = G_n(X)$$

فأمثال X^k هي نفسها أمثال $X^{n^2+n+1-k}$ ومنه

$$G_n(X) = \sum_{k=0}^{\binom{n+1}{2}} f(n,k)\left(X^k + X^{n^2+n+1-k}\right)$$

فإذا عوّضنا $X = 1$ استنتجنا من ذلك أنّ

$$2\sum_{k=0}^{\binom{n+1}{2}} f(n,k) = G_n(1) = 2^{n+1}$$

فالمجموع المطلوب يساوي 2^{2019}.

مسألة 29 في حالة $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$، نضع $\Delta(a,b,c) = \max\left(|a-b|,|b-c|,|c-a|\right)$. نقول إنّ الثلاثية (a,b,c) **ظريفة** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

$$\forall x \in [0,1], \quad -1 \leq ax^2 + bx + c \leq 1$$

عيّن أصغر ثابت M يحقّق $\Delta(a,b,c) \leq M$ وذلك مهما كانت الثلاثيّة الظريفة (a,b,c).

الحل

سنقول إنّ كثير الحدود $P(X) = aX^2 + bX + c$ ظريفٌ إذا وفقط إذا كانت (a,b,c) ظريفة، وعندئذ نكتب $\Delta(P)$ دلالة على $\Delta(a,b,c)$. كثيرات الحدود الظريفة هي كثيرات حدود P من الدرجة الثانية تأخذ على المجال $[0,1]$ قيماً محصورة في $[-1,1]$. ونحن نبحث عن شرط يتعلّق بأمثال كثير الحدود P. هل يمكننا التعبير عن أمثال P بدلالة قيمه عند بعض النقاط في المجال $[0,1]$؟ وبدقّة أكبر عند النقاط 0 و $\frac{1}{2}$ و 1؟

في الحقيقة، إذا كان $P(X) = aX^2 + bX + c$ أمكن حلّ جملة المعادلات الآتية بالمجاهيل a و b و c:

$$\begin{aligned} a + b + c &= P(1) \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c &= P\left(\tfrac{1}{2}\right) \\ c &= P(0) \end{aligned}$$

لنجد

$$\begin{aligned} a &= 2P(0) - 4P\left(\tfrac{1}{2}\right) + 2P(1)\\ b &= -3P(0) + 4P\left(\tfrac{1}{2}\right) - P(1)\\ c &= P(0) \end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned} a - b &= 5P(0) - 8P\left(\tfrac{1}{2}\right) + 3P(1)\\ b - c &= -4P(0) + 4P\left(\tfrac{1}{2}\right) - P(1)\\ c - a &= -P(0) + 4P\left(\tfrac{1}{2}\right) - 2P(1) \end{aligned}$$

فإذا عرّفنا $N(P) = \max\left(|P(0)|, |P(\frac{1}{2})|, |P(1)|\right)$ تحقّقت المتراجحات

$$\begin{aligned} \left|a - b\right| &\le 5\left|P(0)\right| + 8\left|P\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| + 3\left|P(1)\right| &&\le 16N(P)\\ \left|b - c\right| &\le 4\left|P(0)\right| + 4\left|P\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| + \left|P(1)\right| &&\le 9N(P)\\ \left|c - a\right| &\le \left|P(0)\right| + 4\left|P\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| + 2\left|P(1)\right| &&\le 7N(P) \end{aligned}$$

إذن صار لدينا $\Delta(P) \le 16N(P)$ ، فإذا كان P ظريفاً كان $N(P) \le 1$ ، ونتج من ذلك أنّ

$$\Delta(P) \le 16$$

وعليه إذا كان M_0 أصغر ثابت M يحقّق المتراجحة $\Delta(a, b, c) \le M$ وذلك مهما كانت الثلاثيّة الظريفة (a, b, c)، كان $M_0 \le 16$.

وبالعكس، عند تحليل حالة المساواة، نرى أنّه إذا اخترنا P_0 من الدرجة الثانية بحيث $P_0(0) = P_0(1) = 1$ و $P_0\left(\frac{1}{2}\right) = -1$، كان $N(P_0) = 1$ وتحقّقت المساواة $\left|a - b\right| = 16$، وكان من ثَمّ $\Delta(P_0) = 16$.

في الحقيقة،

$$P_0(X) = 1 - 8X + 8X^2 = 1 - 8X(1 - X) = -1 + 2(2X - 1)^2$$

إذن، كثير الحدود P_0 ظريفٌ، وأمثاله $(a_0, b_0, c_0) = (8, -8, 1)$ تحقّق $\Delta(a_0, b_0, c_0) = 16$ ، مما يثبت أنّ $M_0 \ge 16$. فلا بُدّ أن يكون $M_0 = 16$. ■

مسألة 30 نفترض وجود أربعة كثيرات حدود $A(X)$ و $B(X)$ و $C(X)$ و $D(X)$ تُحقّق

$$A(X^5) + XB(X^5) + X^2C(X^5) = (1 + X + X^2 + X^3 + X^4)D(X^5)$$

احسب $A(1)$.

الحل

ليكن $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$ وهو جذر من المرتبة الخامسة للواحد. في حالة $0 \le r < 5$ نعرّف

$$S_r = \sum_{k=0}^{4} \omega^{rk}$$

فيكون $S_0 = 5$ ، وفي حالة $0 < r < 5$ يكون $S_r = \dfrac{\omega^{5r} - 1}{\omega^r - 1} = 0$ ، لأنّ $\omega^5 = 1$.

بتعويض $X = \omega^r$ في العلاقة المعطاة نجد

$$A(1)+\omega^r B(1)+\omega^{2r}C(1)=S_r D(1),\qquad r=0,1,2,3,4$$

وعلى الخصوص، بإعطاء r القيم من 1 إلى 4 نجد:

$$\begin{aligned}A(1)+\omega\ B(1)+\omega^2C(1)&=0\\A(1)+\omega^2B(1)+\omega^4C(1)&=0\\A(1)+\omega^3B(1)+\omega\ C(1)&=0\\A(1)+\omega^4B(1)+\omega^3C(1)&=0\end{aligned}$$

نستنتج بجمع هذه المعادلات طرفاً مع طرف نجد $4A(1)=B(1)+C(1)$ ثُمّ بطرح الأولى من الثانية والثالثة من الرابعة نحصل على جملة المعادلتين

$$\begin{aligned}(\omega-1)\omega B(1)+(\omega^2-1)\omega^2C(1)&=0\\(\omega-1)\omega^3B(1)+(\omega^2-1)\omega C(1)&=0\end{aligned}$$

أو

$$\begin{aligned}B(1)+(\omega+1)\omega\ C(1)&=0\\B(1)+(\omega+1)\omega^3C(1)&=0\end{aligned}$$

إذن $B(1)=C(1)=0$ ، وبالعودة إلى $4A(1)=B(1)+C(1)$ نستنتج أيضاً أنّ $A(1)=0$.

مسألة 31 لتكن $P(X)$ كثير حدود **واحدي** أمثاله أعداد صحيحة. نفترض أنّ جميع جذوره العقدية تقع في القرص $\mathcal{D}=\bar{D}(0,1)=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq1\right\}$. أثبت أن جذور $P(X)$ هي جذور للواحد، واستنتج وجود عددين طبيعيين موجبين تماماً p و q بحيث $P(X)\mid(X^p-1)^q$.

الحل

لتكن $\mathcal{U}_n$ مجموعة كثيرات الحدود الواحديّة ذات الأمثال الصحيحة من الدرجة n والتي تقع جميع جذورها العقدية في القرص $\mathcal{D}$.

- إنّ $\mathcal{U}_n$ مجموعة منتهية.

في الحقيقة، ليكن $Q(X)=X^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k$ ، ولتكن $z_1,\ldots,z_n$ مجموعة جذور Q ، كلٌّ منها مكرّرٌ بقدر درجة مضاعفته. عندئذ

$$Q(X)=\prod_{k=1}^{n}(X-z_k)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\sigma_{n-k}X^k\ .$$

حيث

$$\sigma_k=\sum_{B\subset\{1,2,\ldots n\},|B|=k}\prod\nolimits_{j\in B}z_j$$

ولأنّ الجذور $z_1,\ldots,z_n$ تنتمي إلى $\mathcal{D}$ استنتجنا أنّ

$$\left|\sigma_k\right|=\sum_{B\subset\{1,2,\ldots n\},|B|=k}\prod\nolimits_{j\in B}\left|z_j\right|\leq\operatorname{card}\left(\{B\subset\{1,2,\ldots n\},|B|=k\}\right)=\binom{n}{k}$$

نستنتج إذن أنّ $\left|a_k\right|\leq\binom{n}{k}$ مهما كانت $0\leq k\leq n$ ، وعليه نرى أنّ

$a_k \in \left\{-\binom{n}{k},\dots,-1,0,1,\dots,\binom{n}{k}\right\}$ في حالة $0 \le k \le n$.

إذن

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{U}_n\right) \le \prod_{k=0}^{n}\left(1+2\tbinom{n}{k}\right).$$

- إذا كان $Q(X)$ كثير حدود واحدي من الدرجة n، فيوجد كثير حدود واحدي وحيد $\tilde{Q}$ من الدرجة n يحقّق

$$\tilde{Q}(X^2) = (-1)^n Q(X)Q(-X)$$

الوحدانية واضحة، لنثبت الوجود. في الحقيقة، إنّ $R(X) = (-1)^n Q(X)Q(-X)$ كثير حدود واحدي من الدرجة $2n$، وهو زوجي لأنّ $R(-X) = R(X)$، إذن $R(X) = X^{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^{2k}$. يكفي إذن أن نضع $\tilde{Q}(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$ ليتحقّق المطلوب.

- إذا كان $Q(X) \in \mathcal{U}_n$ كان $\tilde{Q}(X) \in \mathcal{U}_n$، وكانت جذور $\tilde{Q}$ هي مربعات جذور Q .

من الواضح أنّه إذا كانت أمثال $Q(X)$ أعداداً صحيحة استنتجنا أنّ أمثال $\tilde{Q}(X)$ أعداد صحيحة أيضاً. وإذا كان $Q(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - z_k)$ استنتجنا أنّ

$$\tilde{Q}(X^2) = (-1)^n \prod_{k=1}^{n}\big((-X - z_k)(X - z_k)\big) = \prod_{k=1}^{n}(X^2 - z_k^2)$$

ومن ثَمّ

$$\tilde{Q}(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - z_k^2)$$

إذن جذور $\tilde{Q}(X)$ هي مربعات جذور $Q(X)$ وهي من ثَمّ تنتمي إلى $\mathcal{D}$ أيضاً، إذن $\tilde{Q}(X) \in \mathcal{U}_n$.

لنعرّف إذن متتالية كثيرات الحدود $\left(Q_k\right)_{k\ge 0}$ من $\mathcal{U}_n$ تدريجياً كما يأتي

$$Q_0 = P \quad \text{و} \quad Q_{k+1} = \tilde{Q}_k$$

فإذا كان

$$P(X) = \prod_{j=1}^{n}(X - \alpha_j)$$

استنتجنا مما سبق أنّ

$$Q_k(X) = \prod_{j=1}^{n}(X - \alpha_j^{2^k}).$$

ولكن، لمّا كانت المجموعة $\mathcal{U}_n$ منتهية، لا يمكن أن تكون جميع حدود المتتالية $\left(Q_k\right)_{k\ge 0}$ مختلفة، إذن لا بُدّ من وجود دليلين $k < \ell$ يحقّقان $Q_k = Q_\ell$. أي إنّ مجموعة جذور Q_ℓ هي تبديل على مجموعة جذور Q_k، وعليه يوجد تبديل $\sigma : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ يحقّق،

$$\alpha_j^{2^k} = \alpha_{\sigma(j)}^{2^\ell}, \quad j = 1,2,\dots,n$$

إذن، في حالة j من $\mathbb{N}_n$ لدينا

$$\alpha_j^{2^{2k}} = \left(\alpha_j^{2^k}\right)^{2^k} = \left(\alpha_{\sigma(j)}^{2^\ell}\right)^{2^k} = \left(\alpha_{\sigma(j)}^{2^k}\right)^{2^\ell} = \left(\alpha_{\sigma\circ\sigma(j)}^{2^\ell}\right)^{2^\ell} = \alpha_{\sigma\circ\sigma(j)}^{2^{2\ell}}$$

وهكذا،نبرهن بالتدريج أنّه في حالة j من $\mathbb{N}_n$ و m من $\mathbb{N}^*$ لدينا

$$\alpha_j^{2^{mk}} = \alpha_{\underbrace{\sigma\circ\sigma\circ\cdots\circ\sigma}_{m}(j)}^{2^{m\ell}}$$

فإذا اخترنا m مساوية لرتبة التبديل σ، أي بحيث يتحقّق $\underbrace{\sigma\circ\cdots\circ\sigma}_{m} = id$ كان لدينا

$$\alpha_j^{2^{mk}} = \alpha_j^{2^{m\ell}}, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

وهذا يقتضي أن يكون

$$\alpha_j^{2^{m\ell}-2^{mk}} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

إذن α_j هو جذرٌ من المرتبة $2^{m\ell}-2^{mk}$ للواحد. وهذا يثبت الجزء الأوّل من الخاصة المطلوبة.

الآن، لنفترض أنّ

$$P(X) = \prod_{j=1}^{m}(X-\alpha_j)^{n_j}$$

حيث α_j جذرٌ من المرتبة p_j للواحد وأنّ $\left(\alpha_j\right)_{1\le j\le m}$ مختلفة مثنى مثنى. عندئذ بوضع

$$p = \operatorname{lcm}(p_1,\ldots,p_m), \quad q = \max(n_1,\ldots,n_m)$$

نرى مباشرة أنّ $P(X) \mid (X^p-1)^q$. وهي النتيجة المطلوبة. ■

مسألة 32 ليكن كثيرا الحدود $P(X)$ و $Q(X)$ من $\mathbb{C}[X]$، نفترض أنّ $\deg P = \deg Q = n \ge 1$، وأنّ لكثيري الحدود $P(X)$ و $Q(X)$ من $\mathbb{C}[X]$ مجموعة الجذور ذاتها، وكذلك أنّ لكثيري الحدود $P(X)-1$ و $Q(X)-1$ مجموعة الجذور ذاتها. أثبت أنّ $P(X) = Q(X)$.

الحل

لنفترض أنّ

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \left\{z\in\mathbb{C} \mid P(z)=0\right\} = \{z_1,\ldots,z_p\}\\ \mathcal{T} &= \left\{w\in\mathbb{C} \mid P(w)=1\right\} = \{w_1,\ldots,w_q\}\end{aligned}$$

من الواضح أنّ هاتين المجموعتين منفصلتان $\left(\mathcal{Z}\cap\mathcal{T}=\varnothing\right)$. وكذلك

$$P(X) = \lambda\prod_{i=1}^{p}(X-z_i)^{\alpha_i}, \quad P(X)-1 = \lambda\prod_{i=1}^{q}(X-\omega_i)^{\beta_i} \tag{1}$$

نستنتج أنّ كثيري الحدود $\prod_{i=1}^{q}(X-\omega_i)^{\beta_i-1}$ و $\prod_{i=1}^{p}(X-z_i)^{\alpha_i-1}$ يقسمان $P'(X)$، وهما أوّليان فيما بينهما، لأنّ $\mathcal{Z}\cap\mathcal{T}=\varnothing$. إذن $\prod_{i=1}^{p}(X-z_i)^{\alpha_i-1}\prod_{i=1}^{q}(X-\omega_i)^{\beta_i-1}$ يقسم $P'(X)$.

نستنتج مما سبق أنّ

$$\deg P'(X) \geq \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i - 1) + \sum_{i=1}^{q}(\beta_i - 1)$$

ولكن

$$\deg P = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i = \sum_{i=1}^{q}\beta_i \quad \text{و} \quad \deg P' = \deg P - 1$$

إذن $\deg P(X) - 1 \geq 2\deg P - p - q$، أو

$$p + q \geq \deg P + 1$$

نتيجة.

إذا كان $P(X)$ كثيرحدود عقدي غير ثابتٍ كان

$$\operatorname{card}\left\{z \in \mathbb{C} \mid P(z)(P(z)-1) = 0\right\} \geq \deg P + 1$$

في حالتنا، إذا وضعنا $R(X) = P(X) - Q(X)$، كان $\deg R \leq n = \deg P$، ولكنّ R يقبل $n+1$ جذراً هي عناصر المجموعة $\left\{z \in \mathbb{C} \mid P(z)(P(z)-1) = 0\right\}$، فلا بُدّ أن يكون $R(X)$ صفرياً. أي أن يكون $P(X) = Q(X)$.

مسألة 33 –ذات قيمة نظرية– ليكن n و m عددين طبيعيين موجبين تماماً، وليكن a عدداً من $\mathbb{C}^*$. نعرّف $\delta = \gcd(n,m)$ و $\mu = \operatorname{lcm}(n,m)$. أثبت أنّ

$$\gcd(X^n - a^n, X^m - a^m) = X^\delta - a^\delta$$

واستنتج أنّ $(X^n - a^n)(X^m - a^m)$ يقسم $(X^\delta - a^\delta)(X^\mu - a^\mu)$.

الحل

لنفترض أنّ α و β عددان طبيعيّان موجبان تماماً وأنّ q و r هما على الترتيب خارج وباقي قسمة α على β أي $\alpha = p\beta + r$ مع $0 \leq r < \beta$. عندئذ

$$\begin{aligned} X^\alpha - a^\alpha &= X^{p\beta}X^r - a^{p\beta}a^r \\ &= (X^{p\beta} - a^{p\beta})X^r + a^{p\beta}(X^r - a^r) \\ &= (X^\beta - a^\beta)\sum_{k=0}^{p-1} a^{\beta(p-1-k)}X^{\beta k + r} + a^{p\beta}(X^r - a^r) \end{aligned}$$

وعليه إذا كان r باقي قسمة α على β، كان $X^r - a^r$ "شريك" باقي قسمة $X^\alpha - r^\alpha$ على $X^\beta - r^\beta$. ومن ثَمّ

$$\gcd(X^\alpha - a^\alpha, X^\beta - a^\beta) = \gcd(X^\beta - a^\beta, X^r - a^r)$$

لنعرّف إذن $r_0 = n$ و $r_1 = m$، ولنضع، ما دام $r_k \neq 0$، r_{k+1} باقي قسمة r_{k-1} على r_k. عندئذ نعلم أنّه عند أوّل قيمة N يكون عندها $r_{N+1} = 0$ يكون $r_N = \delta = \gcd(n,m)$. واستناداً إلى ماسبق يكون

$$\gcd(X^{r_{k-1}} - a^{r_{k-1}}, X^{r_k} - a^{r_k}) = \gcd(X^{r_k} - a^{r_k}, X^{r_{k+1}} - a^{r_{k+1}})$$

في حالة $0 \leq k \leq N$. ومنه

$$\gcd(X^{r_0} - a^{r_0}, X^{r_1} - a^{r_1}) = \gcd(X^{r_N} - a^{r_N}, X^{r_{N+1}} - a^{r_{N+1}})$$

وهذا يُكافئ قولنا

$$\gcd(X^n - a^n, X^m - a^m) = X^\delta - a^\delta$$

ومن جهة أخرى، لمّا كان كلٌّ من $X^n - a^n$ و $X^m - a^m$ يقسم $X^\mu - a^\mu$ استنتجنا أنّ

$$\operatorname{lcm}(X^n - a^n, X^m - a^m) \mid (X^\mu - a^\mu)$$

وهذا يقتضي أنّ جداء الضرب

$$\gcd(X^n - a^n, X^m - a^m)\operatorname{lcm}(X^n - a^n, X^m - a^m)$$

يقسم

$$(X^\delta - a^\delta)(X^\mu - a^\mu)$$

ولكن

$$\gcd(X^n - a^n, X^m - a^m)\operatorname{lcm}(X^n - a^n, X^m - a^m) = (X^n - a^n)(X^m - a^m)$$

إذن

$$(X^n - a^n)(X^m - a^m) \mid (X^\delta - a^\delta)(X^\mu - a^\mu)$$

وهي النتيجة المطلوبة.

مسألة 34 ليكن P كثير حدود من الدرجة n أمثاله أعداد صحيحة أي $P \in \mathbb{Z}[X]$. وليكن $N = \gcd(P(0), P(1), \ldots, P(n))$. أثبت أنّ

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad N \mid P(m)$$

الحل

لنتأمّل $(\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n)$ كثيرات حدود لاغرانج الموافقة للنقاط $(0,1,\ldots,n)$. أي

$$\ell_k(X) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{X-j}{k-j}, \qquad k = 0,1,\ldots,n$$

ولنعرّف في حالة $k \in \mathbb{N}$ كثيرات الحدود $\binom{X}{k}$ بوضع

$$\binom{X}{0} = 1 \quad \text{و} \quad \binom{X}{k} = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$ في حالة $k > 0$.

عندئذ نلاحظ مباشرة أنّه في حالة k من $\{0,1,\ldots,n\}$ لدينا

$$\begin{aligned}\ell_k(X) &= \frac{X}{k}\cdot\frac{X-1}{k-1}\cdot\cdots\cdot\frac{X-k+1}{1}\cdot\frac{X-k-1}{-1}\cdot\cdots\cdot\frac{X-n}{k-n}\\ &= (-1)^{n-k}\binom{X}{k}\cdot\binom{X-k-1}{n-k} = \binom{X}{k}\cdot\binom{n-X}{n-k}\end{aligned}$$

ولمّا كان

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \binom{-X}{k} = \frac{-X(-X-1)\cdots(-X-k+1)}{k!} = (-1)^k\binom{X+k-1}{k}$$

استنتجنا أيضاً أنّ

$$\ell_k(-X) = \binom{-X}{k}\cdot\binom{n+X}{n-k} = (-1)^k\binom{X+k-1}{k}\cdot\binom{n+X}{n-k}$$

ليكن إذن p عدداً صحيحاً، وليكن k من $\{0,1,\ldots,n\}$. نناقش الحالات التالية :

- في حالة $p\in\{0,1,\ldots,n\}$ لدينا $\ell_k(p)=\delta_{p,k}$، و $\delta_{p,k}$ هو رمز كرونيكر الذي يأخذ القيمة 1 عندما يتساوى الدليلان ويأخذ القيمة 0 عندما يختلفان.
- في حالة $p>n$، لدينا $\ell_k(p)=(-1)^{n-k}\binom{p}{k}\cdot\binom{p-k-1}{n-k}\in\mathbb{Z}$.
- في حالة $p<0$، لدينا $\ell_k(p)=(-1)^{k}\binom{k-p-1}{k}\cdot\binom{n-p}{n-k}\in\mathbb{Z}$.

إذن لقد أثبتنا أنّ

$$\forall k\in\{0,1,\ldots,n\},\ \forall p\in\mathbb{Z},\quad \ell_k(p)\in\mathbb{Z}$$

ليكن P عنصراً من $\mathbb{Z}[X]$ درجته n عندئذ يكون لدينا $P(X)=\sum_{k=0}^{n}P(k)\ell_k(X)$ (–علّل). فإذا كان

$$N=\gcd\big(P(0),P(1),\ldots,P(n)\big)$$

وعرّفنا q_k خارج قسمة $P(k)$ على N كان لدينا

$$\forall m\in\mathbb{Z},\quad P(m)=N\cdot\sum_{k=0}^{n}q_k\ell_k(m)$$

ومن ثَمّ $\forall m\in\mathbb{Z},\quad N\mid P(m)$. ■

مسألة 35 لتكن a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية تحقّق $a+b+c=0$. أثبت صحة التكافؤ الآتي

$$\big(a^3+b^3+c^3>0\big)\Leftrightarrow\big(a^5+b^5+c^5>0\big)$$

الحل

لنضع

$S_k=a^k+b^k+c^k$ في حالة $k\geq 1$.

إنّ الأعداد (a,b,c) هي جذور كثير الحدود $P(X)=X^3+\sigma_2X-\sigma_3$، ولدينا

$$\sigma_2=ab+bc+ca=\frac{1}{2}\Big((a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\Big)=-\frac{1}{2}S_2$$

إذن، بحساب $P(a)+P(b)+P(c)$ نستنتج $S_3=3\sigma_3$. فيأخذ $P(X)$ الصيغة

$$P(X)=X^3-\frac{1}{2}S_2X-\frac{1}{3}S_3$$

وبحساب $a^2P(a)+b^2P(b)+c^2P(c)$ نستنتج أنّ $S_5-\frac{5}{6}S_2S_3=0$، ومن ثَمّ

$$S_5=\frac{5}{6}S_2S_3$$

وهذا يبرهن صحة النتيجة المطلوبة لأنّ $S_3>0$ أو $S_5>0$ يقتضي $S_2>0$. ■

مسألة 36 كثيرات حدود Tchebychev

1. أثبت أنه يوجد في $\mathbb{R}[X]$ كثير حدود وحيد T_n من الدرجة n، يحقّق، أيّاً كان العدد الحقيقي θ، العلاقة $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$. ما هو ثابت X^n في T_n؟

نعرّف أيضاً $U_n = \dfrac{1}{n+1}T'_{n+1}$، ما هي قيمة $U_n(\cos\theta)$ بدلالة θ؟

2. أثبت أنّ كلّاً من T_n و U_n فرديٌّ عندما يكون n فردياً وزوجي عندما يكون n زوجياً.

3. عيّن جذور كلٍّ من T_n و U_n، وأثبت أنها تنتمي جميعاً إلى المجال $]-1,+1[$.

4. أثبت في حالة $n \geq 1$، العلاقتين التاليتين :

$$T_{n+1} = XT_n - (1-X^2)U_{n-1}$$
$$U_n = XU_{n-1} + T_n$$

5. أثبت أن كثيري الحدود T_n و U_n يحققان المعادلتين التفاضليتين الآتيتين:

$$(X^2-1)T''_n + XT'_n - n^2T_n = 0$$
$$(X^2-1)U''_n + 3XU'_n - n(n+2)U_n = 0$$

ثم احسب أمثال كثير الحدود T_n.

6. أثبت أن كثيري الحدود T_n و U_n يحققان العلاقتين التدريجيتين الآتيتين:

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1} \quad \text{حيث} \quad T_0(X) = 1, \quad T_1(X) = X.$$
$$U_{n+1} = 2XU_n - U_{n-1} \quad \text{حيث} \quad U_0(X) = 1, \quad U_1(X) = 2X.$$

الحل

1. **الوحدانيّة.** لنفترض أنّ P و Q كثيري حدود يُحقّقان $P(\cos\theta) = Q(\cos\theta)$ أيّاً كانت θ من $\mathbb{R}$، عندئذ يقبل كثير الحدود $P-Q$ عدداً لا نهائيّاً من الجذور، ولا بُدّ أن يكون صفرياً. أي $P = Q$.

الوجود. لنلاحظ أنّ كثيرات الحدود $T_0 = 1$ و $T_1 = X$ و $T_2 = 2X^2 - 1$ تفي بالغرض في حالة $n = 0$ و $n = 1$ و $n = 2$. لإثبات الوجود في الحالة العامّة، نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}
\cos n\theta &= \mathrm{Re}(e^{\mathrm{i}n\theta}) = \mathrm{Re}((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n)\\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, \mathrm{i}^k \cos^{n-k}\theta \sin^k\theta\right)\\
&= \sum_{0\leq 2k\leq n} C_n^{2k}(-1)^k \cos^{n-2k}\theta\sin^{2k}\theta\\
&= \sum_{0\leq k\leq \lfloor n/2\rfloor} C_n^{2k}(-1)^k(1-\cos^2\theta)^k\cos^{n-2k}\theta
\end{aligned}$$

إذن $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$ وقد عرّفنا

$$T_n = \sum_{0\leq k\leq\lfloor n/2\rfloor} C_n^{2k}X^{n-2k}(X^2-1)^k$$

أمّا ثابتُ X^n في T_n فيساوي $\sum_{0\leq k\leq\lfloor n/2\rfloor} C_n^{2k} = 2^{n-1}$ في حالة $0 < n$. (لاحظ أنّ هذه النتيجة غير صحيحة في حالة $n = 0$).

ونستنتج باشتقاق طرفيَ المساواة في $T_{n+1}(\cos\theta) = \cos(n+1)\theta$ بالنسبة إلى المتحوّل θ:

$$T'_{n+1}(\cos\theta)\sin\theta = (n+1)\sin(n+1)\theta$$

فإذا عرّفنا $U_n = \frac{1}{n+1}T'_{n+1}$ كان لدينا

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

نسمّي متتاليتي كثيرات الحدود $\left(T_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ و $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$، متتاليتي كثيرات حدود تشِبيشِف من النوع الأول والنوع الثاني بالترتيب.

2. لنلاحظ أنّه مهما كان العددالحقيقي θ كان

$$T_n(-\cos\theta) = T_n(\cos(\pi+\theta)) = \cos(n\pi+n\theta) = (-1)^n T_n(\cos\theta)$$

هذا يبرهن أنّ كثير الحدود $T_n(-X) - (-1)^n T_n(X)$ يقبل عدداً لا نهائياً من الجذور فهو صفري. أي

$$T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$$

ونبرهن بالمثل أنّ U_n يحقّق خاصة مماثلة.

3. لنعرّف $x_k^{(n)} = \cos\left(\frac{\pi}{2n}(2k-1)\right)$ في حالة k من $\{1,\ldots,n\}$. عندئذ نتيقّن مباشرة بسبب التناقص التام للتابع $\cos$ على المجال $[0,\pi]$ أنّ

$$-1 < x_n^{(n)} < \cdots < x_{k+1}^{(n)} < x_k^{(n)} < \cdots < x_1^{(n)} < 1$$

ونتيقَّن أيضاً أنّ

$$T_n\left(x_k^{(n)}\right) = \cos\left(nx_k^{(n)}\right) = \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ولأنّ $\deg T_n = n$، نستنتج أنّ T_n يقبل n جذراً بسيطاً في المجال $]-1,+1[$ هي $\left\{x_k^{(n)} : k\in\mathbb{N}_n\right\}$.

وبأسلوب مماثل إذا عرّفنا $y_k^{(n)} = \cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)$ في حالة k من $\mathbb{N}_n$. عندئذ نتيقّن مباشرة بسبب التناقص التام للتابع $\cos$ على المجال $[0,\pi]$ أنّ

$$-1 < y_n^{(n)} < \cdots < y_{k+1}^{(n)} < y_k^{(n)} < \cdots < y_1^{(n)} < 1$$

ونتيقَّن مباشرة أنّ

$$U_n(y_k^{(n)}) = \frac{\sin\left((n+1)\frac{\pi k}{n+1}\right)}{\sin\frac{\pi k}{n+1}} = \frac{\sin\pi k}{\sin\frac{\pi k}{n+1}} = 0$$

ولأنّ $\deg U_n = n$، استنتجنا أنّ U_n يقبل n جذراً بسيطاً في المجال $]-1,+1[$ هي $\left\{y_k^{(n)} : k\in\mathbb{N}_n\right\}$.

4. لتكن n من $\mathbb{N}^*$. نستنتج من المساواتين :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \begin{aligned}\cos(n+1)\theta &= \cos\theta\cos n\theta-\sin\theta\sin n\theta\\ \sin(n+1)\theta &= \cos\theta\sin n\theta+\sin\theta\cos n\theta\end{aligned}$$

أنّ

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \begin{aligned}T_{n+1}(\cos\theta) &= \cos\theta\, T_n(\cos\theta)-(1-\cos^2\theta)U_{n-1}(\cos\theta)\\ U_n(\cos\theta) &= \cos\theta\, U_{n-1}(\cos\theta)+T_n(\cos\theta)\end{aligned}$$

ونستنتج من ذلك مباشرة، بالاستفادة من خاصّة الوحدانيّة في السؤال 1.، أنّ

$$\begin{aligned}T_{n+1} &= XT_n-(1-X^2)U_{n-1}\\ U_n &= XU_{n-1}+T_n\end{aligned}$$

5. باشتقاق طرفَي المساواة في $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ بالنسبة إلى المتحوّل θ مرّتين نجد

$$T_n'(\cos\theta)\sin\theta = n\sin n\theta$$

و

$$-T_n''(\cos\theta)\sin^2\theta+T_n'(\cos\theta)\cos\theta = n^2\cos n\theta = n^2T_n(\cos\theta)$$

أو

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad T_n''(\cos\theta)(\cos^2\theta-1)+T_n'(\cos\theta)\cos\theta = n^2T_n(\cos\theta)$$

وهذا يبرهن أنّ

$$(X^2-1)T_n''+XT_n'-n^2T_n = 0$$

ونستنتج من هذا أنّ

$$(X^2-1)T_{n+1}''+XT_{n+1}'-(n+1)^2T_{n+1} = 0$$

فإذا اشتققنا هذه العلاقة وتذكّرنا أنّ $U_n=\dfrac{1}{n+1}T_{n+1}'$ وجدنا

$$(X^2-1)U_n''+3XU_n'-n(n+2)U_n = 0$$

فنكون بذلك قد وجدنا المعادلتين التفاضليّتين لكثيرات حدود تِشِبيشِف.

▪ لتكن $2\leq n$. ولنفترض أنّ $T_n=\sum_{k=0}^n\lambda_kX^k$ عندئذ نجد بالتعويض في المعادلة التفاضليّة التي يُحقّقها T_n ما يأتي:

$$\sum_{k=0}^n k(k-1)\lambda_kX^k-\sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)\lambda_{k+2}X^k+\sum_{k=0}^n k\lambda_kX^k-\sum_{k=0}^n n^2\lambda_kX^k = 0$$

أو

$$-(2n+1)\lambda_{n-1}X^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}\Big((k^2-n^2)\lambda_k-(k+2)(k+1)\lambda_{k+2}\Big)X^k = 0$$

وهذا يقتضي أنّ

$$\lambda_{n-1}=0 \text{ و } \lambda_k=-\frac{(k+2)(k+1)}{n^2-k^2}\lambda_{k+2} \text{ في حالة } 0\leq k\leq n-2$$

فإذا تذكّرنا أنّ $\lambda_n = 2^{n-1}$ استنتجنا أنّ

$$\lambda_{n-2p} = (-1)^p 2^{n-2p-1}\frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p} \quad \text{و} \quad \lambda_{n-2p-1} = 0$$

وعليه يكون

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^p 2^{n-2p-1}\frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p}X^{n-2p}$$

وبالاستفادة من $U_n = \dfrac{1}{n+1}T'_{n+1}$ نستنتج أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = \sum_{p=0}^{\lfloor (n+1)/2\rfloor}(-1)^p\binom{n-p}{p}(2X)^{n-2p}$$

6. ليكن n عدداً طبيعيّاً أكبر أو يساوي 2. نستنتج من المساواتين :

$$\begin{aligned}\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta &= 2\cos\theta\cos n\theta\\ \sin(n+2)\theta + \sin n\theta &= 2\cos\theta\sin(n+1)\theta\end{aligned}$$

أنّ

$$\begin{aligned}\forall\theta\in\mathbb{R},\quad T_{n+1}(\cos\theta) + T_{n-1}(\cos\theta) &= 2\cos\theta\; T_n(\cos\theta)\\ U_{n+1}(\cos\theta) + U_{n-1}(\cos\theta) &= 2\cos\theta\; U_n(\cos\theta)\end{aligned}$$

ونستنتج من ذلك مباشرة، بالاستفادة من خاصّة الوحدانيّة في السؤال 1، أنّ

$$\begin{aligned}T_{n+1} &= 2XT_n - T_{n-1}\\ U_{n+1} &= 2XU_n - U_{n-1}\end{aligned}$$

ونتيقَّن مباشرة من أنّ $T_0 = 1$ و $T_1 = X$ و $U_0 = 1$ و $U_1 = 2X$.

ملاحظات.

- يمكن التعبير عن U_n بصفته عبارة خطية بكثيرات الحدود $(T_k)_{0\le k\le n}$ وذلك بملاحظة ما يأتي

$$\begin{aligned}\frac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta} &= \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}e^{-i(n-k)\theta}\\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{i(2k-n)\theta} = \sum_{k=0}^{n}\cos\big((2k-n)\theta\big)\end{aligned}$$

ومنه

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} T_{|n-2k|}$$

أو

$$U_{2m} = T_0 + 2\sum_{k=1}^{m}T_{2k}, \quad U_{2m+1} = 2\sum_{k=0}^{m}T_{2k+1}$$

وبالعكس، $T_n = \frac{1}{2}\big(U_n - U_{n-2}\big)$ في حالة $n \ge 2$.

- بوجه عام، تؤلف كثيرات الحدود $\left(T_k\right)_{0\le k}$ أساساً لفضاء كثيرات الحدود. أي يمكن التعبير عن أي كثير حدود بصيغة عبارة خطية بكثيرات حدود تشِبيشف. إذ نلاحظ أنّ

$$(\cos\theta)^n = \frac{1}{2^n}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(2k-n)\theta} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos\big((2k-n)\theta\big)$$

ومنه

$$X^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T_{|2k-n|}$$

- لنتأمّل

$$Q(X) = X^n T_n\left(\frac{1}{2}\left(X+\frac{1}{X}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(X^{2n}+1\right)$$

نلاحظ أنّ $Q(e^{i\theta}) = 0$ مهما كانت θ. إذن Q هو كثير الحدود الصفري. إذن

$$T_n\left(\frac{1}{2}\left(X+\frac{1}{X}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(X^n+\frac{1}{X^n}\right)$$

وعلى الخصوص في حالة $n\ge 1$ لدينا التكافؤ

$$\left|x\right| > 1 \Leftrightarrow \left|T_n(x)\right| > 1$$

- ملاحظة أخيرة مفيدة. $T_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = (-1)^k$ فالتابع $x\mapsto T_n(x)$ يغير إشارته $n+1$ مرة في المجال $[-1,1]$، ويبلغ حدّه الأعلى أو الأدنى على هذا المجال $n+1$ مرة.

مسألة 37 ليكن n عدداً طبيعيّاً موجباً تماماً. أثبت أنّه يوجد كثيرا حدود $P(X)$ و $Q(X)$ يحققان $\deg P(X) = n,\quad (P(X))^2-1 = (X^2-1)(Q(X))^2$.

الحل

الطريقة الأولى. في حالة $n=0$ يمكن أن نختار $(P(X),Q(X)) = (1,0)$. وفي حالة $n=1$ يمكن أن نختار $(P(X),Q(X)) = (X,1)$. لنفترض إذن أنّ $n\ge 2$. ولنفترض أنّ $P(X)$ و $Q(X)$ كثيرا حدود يحقّقان الشروط المعطاة، عندئذ $\deg Q = n-1$. ونستنتج من المساواة

$$\left(P(X)\right)^2 + (1-X^2)\left(Q(X)\right)^2 = 1 \tag{1}$$

أنّ $P(X)$ و $Q(X)$ أوليّان فيما بينهما. وباشتقاق طرفي المساواة السابقة نجد

$$P(X)P'(X) = ((X^2-1)Q'(X)+XQ(X))Q(X) \tag{2}$$

أي $Q \mid PP'$، ولأنّ $\gcd(Q,P)=1$ استنتجنا أنّ $Q\mid P'$. ولكن $\deg Q = n-1 = \deg P'$، إذن $P' = \lambda Q$ حيث λ عدد حقيقيّ. وإذا كان aX^n الحدّ المسيطر في $P(X)$ استنتجنا من (1) أنّ الحدّ المسيْطِر في $Q(X)$ يساوي $\pm aX^{n-1}$ وإذا استبدلنا $-Q(X)$ بكثير الحدود $Q(X)$ عند اللزوم استنتجنا أنّه يمكننا أن

نفترض أنّ الحدّ المسيطر في $Q(X)$ يساوي aX^{n-1}. وعندئذ نستنتج من المساواة $Q=\lambda P'$ أنّ $P'=nQ$. فإذا عدنا إلى (2) واختصرنا على $P'\neq 0$ وجدنا

$$n^2P(X)=(X^2-1)P''(X)+XP'(X) \tag{3}$$

وهنا، كل مَن يتعرّف المعادلة التفاضلية لكثيرات حدود تشيبيشف يربح مباشرة، وإلا لنفترض أنّ

$$P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$$

ولنبحث عن أمثال P المجهولة. بالتعويض في (3) نجد

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}n^2a_kX^k &= X^2P''(X)+XP'(X)-P''(X)\\ &=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)a_kX^k+\sum_{k=0}^{n}ka_kX^k-\sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)a_{k+2}X^k\\ &=n^2a_nX^n+(n-1)^2a_{n-1}X^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2}(k^2a_k-(k+2)(k+1)a_{k+2})X^k\end{aligned}$$

بمقارنة أمثال X^k في الطرفين نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}(n^2-(n-1)^2)a_{n-1}&=0\\ (k^2-n^2)a_k-(k+2)(k+1)a_{k+2}&=0,\quad k=0,1,\ldots,n-2\end{aligned}$$

إذن

$$a_k=-\frac{(k+2)(k+1)}{(n-k)(n+k)}a_{k+2},\quad k=0,1,\ldots,n-2 \text{ و } a_{n-1}=0$$

من العلاقة التدريجية نستنتج أنّ $a_{n-2j-1}=0$ في حالة $2j+1\leq n$.

وأنّ

$$\begin{aligned}a_{n-2}&=-\frac{n(n-1)}{2^2(n-1)}a_n,\\ a_{n-4}&=-\frac{(n-2)(n-3)}{2^2(2)(n-2)}a_{n-2}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^4(1\cdot 2)(n-1)\cdot(n-2)}a_n\end{aligned}$$

وبوجه عامّ

$$\begin{aligned}a_{n-2j}&=(-1)^j\frac{n(n-1)\cdots(n-2j+1)}{2^{2j}(1\cdot 2\cdots j)(n-1)(n-2)\cdots(n-j)}a_n\\ &=n\frac{(-1)^j}{2^{2j}}\cdot\frac{(n-j-1)!}{(n-2j)!(j!)}a_n\end{aligned}$$

وعليه

$$P(X)=a_n\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{n}{n-j}\frac{(-1)^j}{2^{2j}}\cdot\binom{n-j}{j}X^{n-2j}$$

وعلى الخصوص

$$P(0) = \begin{cases} a_n \dfrac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & : n = 0 \bmod 2 \\ 0 & : n = 1 \bmod 2 \end{cases}$$

$$Q(0) = \frac{1}{n} P'(0) = \begin{cases} 0 & : n = 0 \bmod 2 \\ a_n \dfrac{(-1)^{(n-1)/2}}{2^{n-1}} & : n = 1 \bmod 2 \end{cases}$$

ولكن، استناداً إلى (1) لدينا $(P(0))^2 + (Q(0))^2 = 1$، ومن ثمّ $a_n = \pm 2^{n-1}$، ويمكننا أن نختار الإشارة الموجبة لنجد

$$P(X) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n(-1)^j}{n-j} \cdot \binom{n-j}{j} (2X)^{n-2j}$$

وبالعكس، إذا عرّفنا $P_n(X)$ بالصيغة السابقة، حقّق P_n العلاقة (3)، ثُمّ إذا وضعنا $Q_n(X) = \frac{1}{n} P_n'(X)$، حقّق الزوج (P_n, Q_n) العلاقة (2) ولنتج من ذلك أنّ $\big(P(X)\big)^2 + (1 - X^2)\big(Q(X)\big)^2$ كثير حدود ثابت لأنّ مشتقه صفري، ويتحدّد هذا الثابت بأخذ القيمة عند الصفر، لنستنتج أنّ الزوج (P_n, Q_n)، يُحقّق الخاصة المطلوبة، وهذا ينجز الإثبات.

ملاحظة: لقد أثبتنا أيضاً أنّ للمسألة أربعة حلول فقط لكل درجة، هي $(\pm P_n, \pm Q_n)$.

الطريقة الثانية. هذه الطريقة تعتمد على الملاحظة الآتية: عند تعويض X بالمقدار $\cos\theta$ تأخذ المساواة

$$(P(X))^2 + (1 - X^2)(P'(X)/n)^2 = 1$$

الشكل الآتي

$$(P(\cos\theta))^2 + \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{d}{d\theta} P(\cos\theta)\right)^2 = 1$$

فإذا كان $P(\cos\theta) = \cos(\varphi(\theta))$، حيث $\varphi(\theta)$ هو تابع للمتغير θ علينا تعيينه، أخذت العلاقة السابقة الشكل

$$\cos^2\varphi(\theta) + \left(\frac{\varphi'(\theta)}{n}\right)^2 \sin^2\varphi(\theta) = 1$$

فالخيار المناسب هو $\varphi'(\theta) = n$ أو $\varphi(\theta) = n\theta$، وعندها يكون $P(\cos\theta) = \cos(n\theta)$. ولكنّ هذه المساواة تعيّن P بطريقة وحيدة لا لبس فيها لأنّ

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \Re\Big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\Big) = \Re\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}\theta i^k \sin^k\theta\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \cos^{n-2k}\theta \cdot \sin^{2k}\theta \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (\cos\theta)^{n-2k} \cdot (1 - \cos^2\theta)^k = P(\cos\theta) \end{aligned}$$

حيث

$$P(X)=\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}(-1)^k X^{n-2k}\cdot(1-X^2)^k$$

وأمثال X^n في $P(X)$ تساوي $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}=2^{n-1}$ ، وعلى الخصوص $\deg P(X)=n$.

إذن باختيار $P(X)$ معرّفاً بالصيغة السابقة، وبوضع $Q(x)=\frac{1}{n}P'(X)$ يكون لدينا $P(\cos\theta)=\cos(n\theta)$ وكذلك

$$Q(\cos\theta)\sin\theta=\sin(n\theta)$$

إذن

$$\big(P(\cos\theta)\big)^2+\big(Q(\cos\theta)\sin\theta\big)^2=\cos^2(n\theta)+\sin^2(n\theta)=1$$

وهذا يبرهن أنّ

$$(P(X))^2+(1-X^2)(Q(X))^2=1$$

فالزوج (P,Q) المعرّف هكذا يحقّق الخاصة المطلوبة أيضاً. وأكثر من ذلك، يمكننا أن نؤكّد أنّ $P(X)=P_n(X)$ لأنّ لكثيري الحدود الحدّ المسيطر نفسه. فنكون قد أثبتنا صحة المساواة

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}(-1)^k X^{n-2k}\cdot(1-X^2)^k=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{n(-1)^j}{n-j}\cdot\binom{n-j}{j}(2X)^{n-2j}\tag{4}$$

فمثلاً، في حالة $X=1/\sqrt{2}$ نجد:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}(-1)^k=2^{n-1}\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{n}{n-j}\cdot\binom{n-j}{j}\left(\frac{-1}{2}\right)^j$$

الطريقة الثالثة. نختار $P=T_n$ و $Q=U_{n-1}$ في حالة $n\geq 1$ ونحسب

$$(P(\cos\theta))^2+(1-\cos^2\theta)(Q(\cos\theta))^2=\cos^2 n\theta+\sin^2\theta\frac{\sin^2 n\theta}{\sin^2\theta}=1$$

إذن يقبل كثير الحدود $(P(X))^2+(1-X^2)(Q(X))^2-1$ عدداً لا نهائياً من الجذور فهو صفري، ويكتمل الإثبات.